Matthias Krause
Alexander Moch

Mannheim, den 07.12.2020

CS 307 Algorithmen und Datenstrukturen, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 11

AUFGABE 11.1:

Ein HIV-Schnelltest erkennt eine Infektion in 92 % der Fälle richtig. Liegt keine Infektion vor, so liegt der HIV-Schnelltest in 99,95 % der Fälle richtig. Wir nehmen an, 0,1 % der Bevölkerung sind mit dem HI-Virus infiziert.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand tatsächlich mit dem HI-Virus infiziert ist, falls diese Person ein positives Testergebnis erhält?

AUFGABE 11.2:

Eine Familie $\mathcal{H}$ von Hashfunktionen $h : U \to \{1, \ldots, m\}$ heißt *2-unabhängig*, falls für zwei verschiedene Eingaben $x \neq x' \in U$ und beliebige $y, y' \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(x) = y \text{ und } h(x') = y'] = \frac{1}{m^2}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Jede 2-unabhängige Hashfunktion ist universell.

(b) Jede 2-unabhängige Hashfunktion ist uniform.

AUFGABE 11.3:

Sei $\mathcal{H}$ eine universelle Familie von Hashfunktionen $h : U \to \{1, \ldots, m\}$, d.h. für beliebige $x \neq x' \in U$ gilt:

$$\Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(x) = h(x')] = \frac{1}{m}.$$

Was ist die erwartete Anzahl an Kollisionen, nachdem die Hashfunktion q-mal ausgewertet wurde? Nach wie vielen Auswertungen ist die Anzahl der erwarteten Kollisionen erstmals größer als 1?

AUFGABE 11.4:

In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass ein Jahr 365 Tage hat und die Geburtstage innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind. Das heißt, eine Person hat an einem bestimmen Tag ihren Geburtstag mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{365}$.
Wie viele Menschen müssen sich mindestens in einem Raum befinden, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass zwei davon am selben Tag Geburtstag haben, größer ist als 1/2?