Matthias Krause
Alexander Moch

Mannheim, den 30.11.2020

CS 307 Algorithmen und Datenstrukturen, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 10

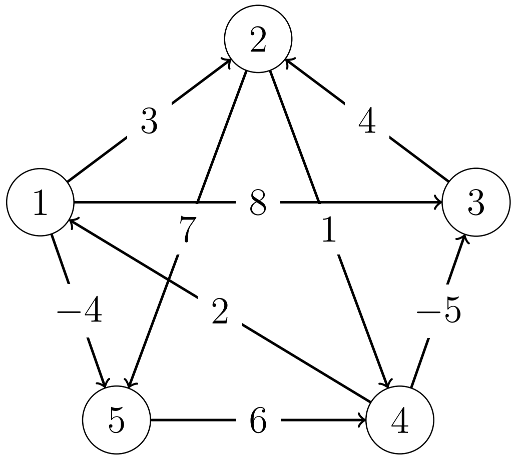
AUFGABE 10.1:

Es sei $G = (V, E, w)$ ein gerichteter gewichteter Graph mit $w : E \to \mathbb{R}$, der auch negative Kreise enthalten darf. Wie kann man den Algorithmus "Slow-All-Pairs-Shortest-Paths(W, n)" so modifizieren, dass festgestellt werden kann, ob G negative Kreise enthält?

Man berechnet $D^{(1)}, \ldots, D^{(n)}$ und prüft, ob ein k, $1 \le k \le n$, und ein Knoten i existieren mit $D^{(n)}_{ii} < 0$.

AUFGABE 10.2:

Wenden Sie Fast-All-Pairs-Shortest-Paths auf unten stehenden Graphen an und geben Sie die entsprechenden Matrizen $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(4)} = \Delta_G$ und $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \Pi^{(4)} = \Pi_G$ an.



$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & - & 2 & 2 \\ - & 3 & - & - & - \\ 4 & - & 4 & - & - \\ - & - & - & 5 & - \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & \infty & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ - & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & - & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 10.3:

Führen Sie den Algorithmus von Floyd-Warshall auf dem durch folgende Gewichtsmatrix gegebenen Graphen aus. Geben Sie die drei als Zwischenergebnisse berechneten Matrizen und die berechnete Distanzmatrix an.

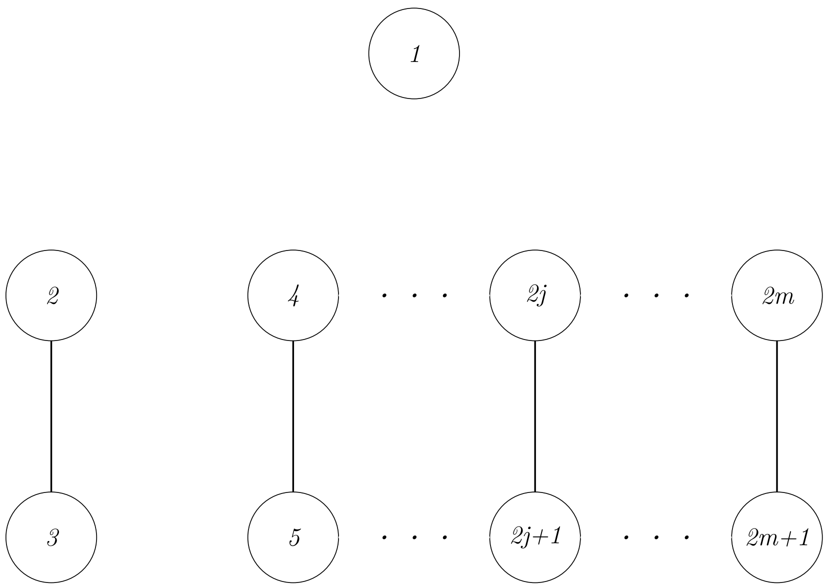
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -1 & \infty \\ 7 & \infty & 0 & 2 \\ 2 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -1 & \infty \\ 7 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ \infty & 0 & -1 & \infty \\ 7 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

AUFGABE 10.4:

Wir bezeichnen mit $K_n = (V, E)$ den ungerichteten Graphen über $V = \{1, \ldots, n\}$, der alle $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten enthält. Es sei n ungerade, d.h. $n = 2m+1$ für ein $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass K_n mindestens 2^m verschiedene spannende Bäume enthält.

Wir betrachten zunächst den folgenden Untergraphen U:



Man erhält nun für jeden der 2^m Vektoren $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \{0,1\}^m$ einen Spannbaum $T_b = \{e_1^b, \ldots, e_m^b\} \bigcup U$, wobei

$$e_j^b = \begin{cases} (1, 2j), & \textit{für } b_j = 0 \\ (1, 2j+1), & \textit{für } b_j = 1. \end{cases}$$

AUFGABE 10.5:

Wir bezeichnen mit $\tilde{K}_n = (V, E)$ den gerichteten Graphen über $V = \{1, \ldots, n\}$, der alle $n(n-1)$ möglichen Kanten enthält. Zeigen Sie, dass es mindestens $(n-2)!$ verschiedene gerichtete Wege von 1 nach n gibt.

Wir betrachten nur die (kreisfreien) Wege mit $n-1$ *Kanten. Diese sind eindeutig beschrieben durch die Folge ihrer* $n-2$ *Zwischenknoten. Als Zwischenknoten kommen nur* $2, \ldots, n-1$ *in Frage. Auf dieser Menge mit* $n-2$ *Elementen gibt es genau* $(n-2)!$ *verschiedene Permutation, d.h. verschiedene Reihenfolgen der Zwischenknoten, also gibt es entsprechend auch* $(n-2)!$ *verschiedene Wege von* 1 *nach* n.