Matthias Krause
Alexander Moch

Mannheim, den 02.11.2020

CS 307 Algorithmen und Datenstrukturen, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 6

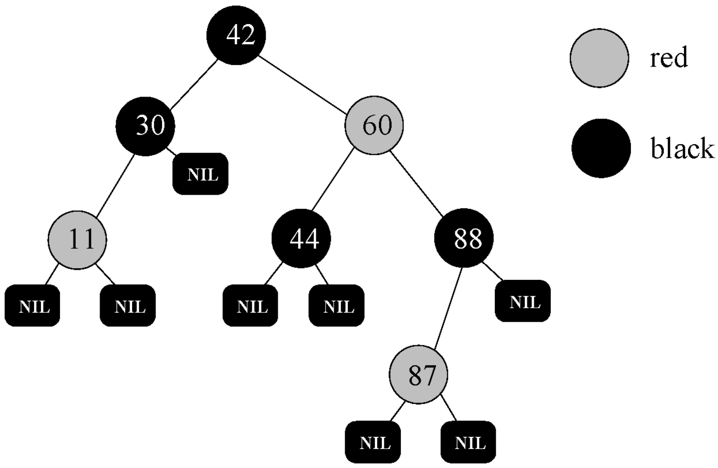
AUFGABE 6.1:

Zeigen Sie, dass jeder binäre Suchbaum mit n Knoten durch $O(n)$ Rotationen in jeden anderen binären Suchbaum mit n Knoten transformiert werden kann. (Beachten Sie, dass hier Schlüssel nicht berücksichtigt werden müssen.)
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass höchstens $n-1$ Rechtsrotationen ausreichen, um einen beliebigen binären Suchbaum in eine (rechtsverlaufende) Kette zu transformieren.

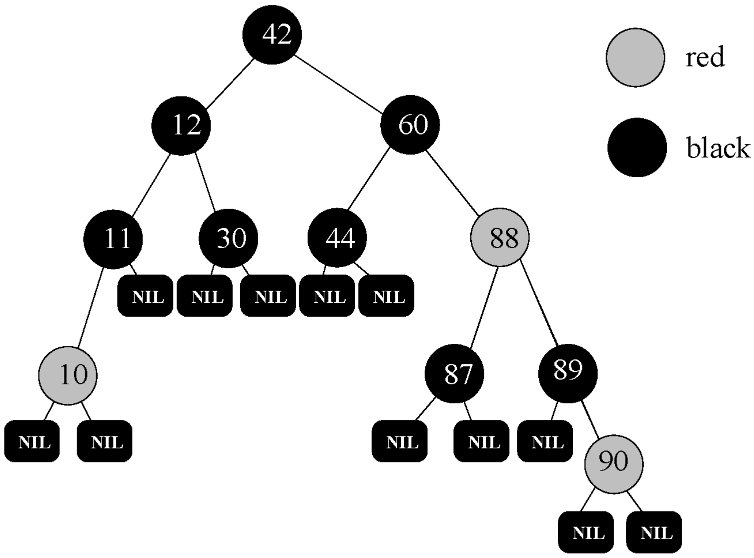
Wir betrachten jeweils den Pfad, der von der Wurzel ausgehend immer zum rechten Sohn geht, bis kein solcher Sohn mehr existiert. Solange auf diesem Pfad ein Knoten mit einem linken Sohn existiert, führen wir damit eine Rechtsrotation aus, was die Anzahl der Knoten auf diesem Pfad um 1 *erhöht. Also liegen nach höchstens $n-1$ Rotationen alle Knoten auf diesem Pfad.*
Um einen Baum T in einen Baum T' (beide mit n Knoten) umzuwandeln, transformieren wir T (wie oben beschrieben) in eine Kette und führen dann (in umgekehrter Reihenfolge) die symmetrischen Rotationen zu denjenigen Rotationen aus, die T' in eine Kette umwandeln würden.

AUFGABE 6.2:

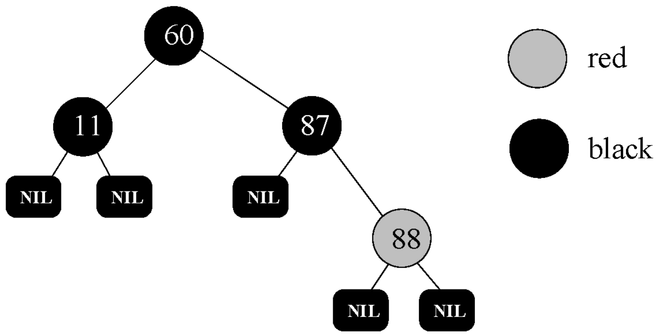
Betrachten Sie den abgebildeten Rot-Schwarz-Baum.



a) Fügen Sie in den Rot-Schwarz-Baum die Elemente mit den Schlüsseln 12, 10, 89, 90 (in dieser Reihenfolge) ein. Wie sieht der Baum nun aus?



b) Löschen Sie aus dem ursprünglichen Rot-Schwarz-Baum die Elemente mit den Schlüsseln 44, 42, 30. Wie sieht der Baum nun aus?



AUFGABE 6.3:

Wir betrachten den gerichteten Graphen $G = (V, E)$, festgelegt durch die Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 9\}$ und die Menge der (gerichteten) Kanten

$$
\begin{aligned}
E = &\{(1,3), (1,5), (1,6)\} \\
&\cup \{(2,1), (2,4), (2,5)\} \\
&\cup \{(3,4)\} \\
&\cup \{(4,3)\} \\
&\cup \{(5,2), (5,7)\} \\
&\cup \{(6,1), (6,8)\} \\
&\cup \{(7,1), (7,5), (7,6)\} \\
&\cup \{(8,3), (8,9)\} \\
&\cup \{(9,3), (9,6)\}.
\end{aligned}
$$

Führen Sie nun eine Breitensuche mit Startknoten 1 auf G aus (sprich: $BFS(G, 1)$) und beantworten Sie die folgenden Teilaufgaben:

a) In welcher Reihenfolge werden die Knoten des Graphen G im Rahmen der Breitensuche $BFS(G, 1)$ zum ersten Mal berührt?

b) Geben Sie für jeden Knoten $v \in V \setminus \{1\}$ den entsprechenden Wert $v.d$ an.

c) Wie sieht der zugehörige Kürzeste-Wege-Baum aus?

a) *1,3,5,6,4,2,7,8,9*

b) *2.d=2, 3.d=1, 4.d=2, 5.d=1, 6.d=1, 7.d=2, 8.d=2, 9.d=3. (Siehe auch Aufgabenteil c))*

c)

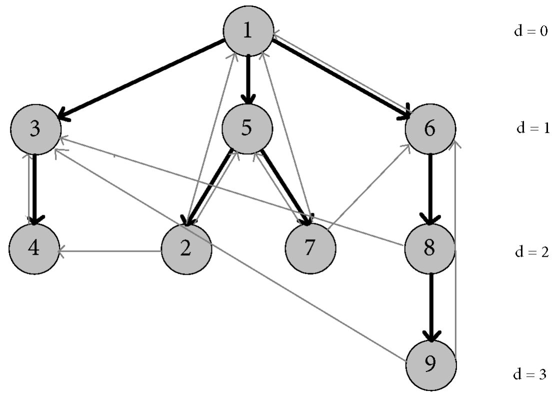


Abbildung 1: *
Graph mit kürzeste-Wege-Baum (fett gedruckte Kanten).

AUFGABE 6.4$^{\mathbf{K}}$:

Ein gerichteter Graph G mit 10 Knoten $\{a, \ldots, j\}$ sei gegeben durch die folgenden Adjazenzlisten:

$\boxed{\text{a}} \to d \to h \to j$
$\boxed{\text{b}} \to c \to j$
$\boxed{\text{c}} \to b \to j$
$\boxed{\text{d}} \to a \to f \to h$
$\boxed{\text{e}} \to b \to g$
$\boxed{\text{f}} \to b \to c \to g$
$\boxed{\text{g}} \to e \to i$
$\boxed{\text{h}} \to a \to b \to e$
$\boxed{\text{i}} \to b \to c$
$\boxed{\text{j}} \to c \to i$

a) Führen Sie den Tiefensuche-Algorithmus DFS (beginnend mit dem Knoten a) auf dem Graphen G durch und geben Sie als Ergebnis eine (aufsteigend) sortierte Reihenfolge der Knoten gemäß der d-Nummern sowie eine (aufsteigend) sortierte Reihenfolge der Knoten gemäß der f-Nummern an.

Gemäß d-Nummer: a,d,f,b,c,j,i,g,e,h
Gemäß f-Nummer: i,j,c,b,e,g,f,h,d,a

b) Berechnen Sie die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G.

$[a]_G = \{a, d, h\}, [b]_G = \{b, c, i, j\}, [e]_G = \{e, g\}, [f]_G = \{f\}$