Matthias Krause
Alexander Moch

Mannheim, den 28.09.2020

CS 307 Algorithmen und Datenstrukturen, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 1

AUFGABE 1.1:

Füllen Sie die folgende Tabelle mit den Symbolen $O, o, \omega, \Omega, \Theta$ aus. Verwenden Sie dabei die Symbole O und Ω nur dann, wenn kein anderes Symbol verwendet werden kann.

	$\log n$	$2^{n/2}$	$\sqrt{n}$	5	2^n	n	e^n	n^2
$\log n$	Θ	o	o	ω	o	o	o	o
$2^{n/2}$	ω	Θ	ω	ω	o	ω	o	ω
$\sqrt{n}$	ω	o	Θ	ω	o	o	o	o
5	o	o	o	Θ	o	o	o	o
2^n	ω	ω	ω	ω	Θ	ω	o	ω
n	ω	o	ω	ω	o	Θ	o	o
e^n	ω	ω	ω	ω	ω	ω	Θ	ω
n^2	ω	o	ω	ω	o	ω	o	Θ

AUFGABE 1.2:

Finden Sie für jede der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{N}^{>1} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine möglichst kurz darstellbare Funktion $g_i : \mathbb{N}^{>1} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, so dass gilt: $f_i \in \Theta(g_i)$.

- $f_1(n) = n^2 2^n + 4^n + 3^n$
- $f_2(n) = n(n-1)/2$
- $f_3(n) = \log(n^{70})$
- $f_4(n) = 9n \log n + 30n(\log n)^2 + n$
- $f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^i$
- $f_6(n) = \frac{n}{\log n} + \frac{n^2}{\log^2 n}$

Lsg.:

- $g_1(n) = 4^n$
- $g_2(n) = n^2$
- $g_3(n) = \log n$

- $g_4(n) = n(\log n)^2$
- $g_5(n) = 2^n$
- $g_6(n) = \frac{n^2}{\log^2 n}$

AUFGABE 1.3:
Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^{\geq 0}$. Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel:

- $f(n) + g(n) \in \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$,
  gilt, da für alle $n \in \mathbb{N} : 1 \cdot \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2 \cdot \max\{f(n), g(n)\}$.
- Wenn $f(n) \notin O(g(n))$, so gilt: $f(n) \in \Omega(g(n))$.
  Gegenbeispiel: $g(n) := n^2$, $f(n) := n^{2+\sin n}$ *(oder* $f(n) := n^3(1^n + (-1)^n)$*).*

AUFGABE 1.4: Versuchen Sie, für jede der folgenden Funktionen $T_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine möglichst genaue Beschreibung von $T_i(n)$ in der O-Notation anzugeben.

a) $T_1(1) = 1;\ T_1(n) = 7T_1(\lceil n/2 \rceil) + n^2$ für $n > 1$,

Die Anwendung des Master-Theorems (Fall 1) liefert $T_1(n) \in \Theta(n^{\log 7})$.

b) $T_2(1) = 1;\ T_2(n) = T_2(\lceil n/2 \rceil) + \sqrt{n}$ für $n > 1$,

Die Anwendung des Master-Theorems (Fall 3) liefert $T_2(n) \in \Theta(\sqrt{n})$.

c) $T_3(1) = T_3(2) = 1;\ T_3(n) \leq 4T_3(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log^2(n)$ für $n > 2$.

Sei $m := \lceil \log n \rceil$. *Es gilt* $T_3(n) \leq T_3(2^m) \leq 4T_3(2^{\lceil m/2 \rceil}) + m^2$. *Wir definieren* $S(m) := T_3(2^m)$. *Dann gilt* $S(m) \leq 4S(\lceil m/2 \rceil) + m^2$. *Die Anwendung des Master-Theorems (Fall 2) liefert* $S(m) \in O(m^2 \log m)$*; also* $T_3(n) \in O(\log^2 n \log \log n)$.