Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 14.12.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 12

AUFGABE 12.1:

Wir bezeichnen mit $\mathrm{MOD}_m \subseteq \{0,1\}^*$, $m \in \mathbb{N}^+$, die Sprache all der Worte $x = (x_1 \dots x_{|x|})$, $|x| \geq 1$, über dem Alphabet $\{0,1\}$, für die $\sum_{i=1}^{|x|} x_i$ durch m teilbar ist.
Zeige, dass $\mathrm{MOD}_m \in \mathrm{REG}$ für alle $m \in \mathbb{N}^+$ gilt, indem du beschreibst, wie für beliebig fixiertes $m \in \mathbb{N}^+$ ein zugehöriger DFA konstruiert werden kann, der genau die Worte aus MOD_m akzeptiert.

Für ein beliebiges, aber fixes $m \in \mathbb{N}+$ lässt sich ein DFA, der genau die Worte aus MOD_m akzeptiert, konstruieren, indem für die möglichen Reste $0, \dots, m-1$ entsprechende Zustände $q_{[0]}, \dots, q_{[m-1]}$ eingeführt werden, von denen lediglich $q_{[0]}$ akzeptierend ist. Die zugehörigen Zustandsübergänge ergeben sich für $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ offenbar wie folgt: Wird im Zustand $q_{[i]}$ das Zeichen 0 gelesen, verbleibt der DFA im Zustand $q_{[i]}$; wird im Zustand $q_{[i]}$ das Zeichen 1 gelesen, wechselt der DFA vom Zustand $q_{[i]}$ in den Zustand $q_{[(i+1) \bmod m]}$. Zusätzlich führen wir noch einen separaten, nicht-akzeptierenden Startzustand q^* ein, von dem aus beim Lesen des (ersten) Zeichens $j \in \{0,1\}$ in den Zustand $q_{[j \bmod m]}$ gewechselt wird.

AUFGABE 12.2:

Es sei Σ ein endliches Alphabet und $w \in \Sigma^*$. Ein Wort $y \in \Sigma^*$ heißt Teilwort von w, falls Worte $x, z \in \Sigma^*$ existieren, sodass $w = xyz$.
Wir definieren

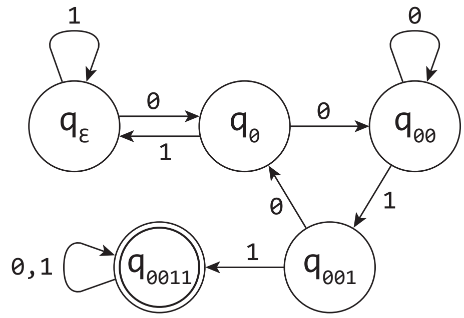
$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält } 0011 \text{ als Teilwort}\}.$$

Bestimme alle Präfixsprachen von L und zeichne einen minimalen Nerode-Automaten.

Die fünf Präfixsprachen sehen aus wie folgt:

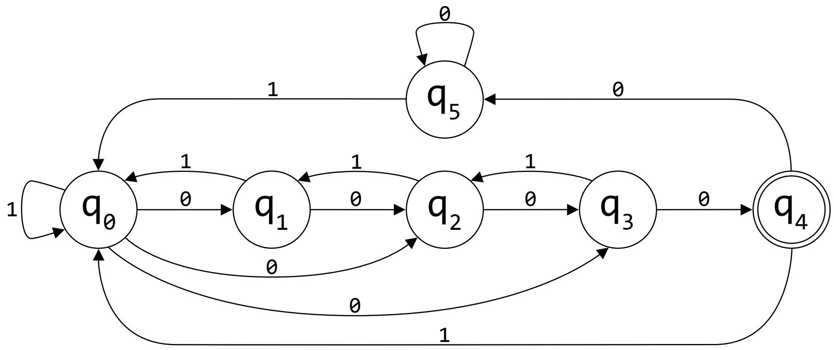
1. $L_\epsilon = L$
2. $L_0 = L \cup \{011x \mid x \in \{0,1\}^*\}$
3. $L_{00} = L_0 \cup \{11x \mid x \in \{0,1\}^*\}$
4. $L_{001} = L \cup \{1x \mid x \in \{0,1\}^*\}$
5. $L_{0011} = \{0,1\}^*$

Der entsprechende Nerode-Automat hat die folgende Form:



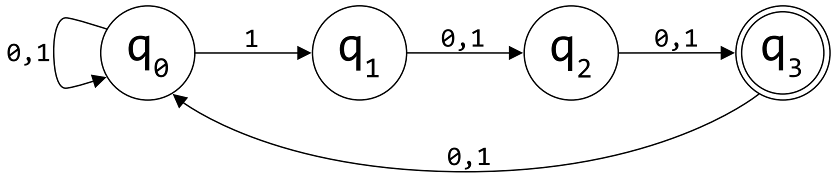
AUFGABE 12.3:

Kontruiere einen NFA für die Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ aller 0, 1-Worte, welche mit mindestens zwei und mit höchstens vier Nullen enden.

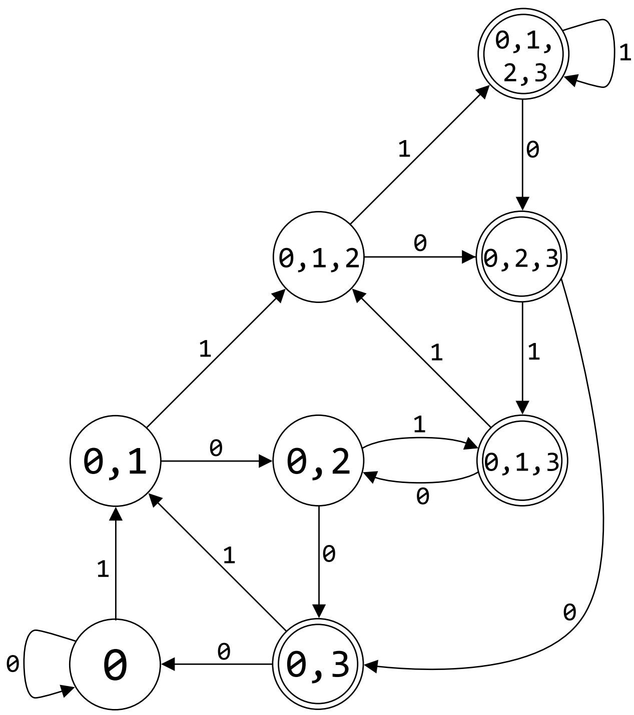


AUFGABE 12.4:

Wende die Potenzmengenkonstruktion auf den folgenden NFA an.



Die Zustände der Lösung beinhalten als Label nur die Indizes der Zustände des NFAs.



AUFGABE 12.5:

Bestimme reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen über $\{0, 1\}$.

a) Die Sprache in Aufgabe 12.3.

$$((0+1)^* \cdot 1)^* \cdot (\epsilon + 0) \cdot (\epsilon + 0) \cdot 00$$

b) Die Menge der Worte $x \in \{0, 1\}^*$ mit mindestens drei Nullen.

$$(0+1)^* \cdot 0 \cdot (0+1)^* \cdot 0 \cdot (0+1)^* \cdot 0 \cdot (0+1)^*$$

c) Die Menge der Worte $x \in \{0, 1\}^*$ mit höchstens drei Einsen.

$$0^* \cdot (\epsilon + 1) \cdot 0^* \cdot (\epsilon + 1) \cdot 0^* \cdot (\epsilon + 1) \cdot 0^*$$

d) Die Menge $\{10, 110, 1100\}$.

$$10 + 110 + 1100$$

e) Die Menge der Worte mit einer geraden Anzahl von Nullen.

$$((0 \cdot 1^* \cdot 0) + 1)^*$$