Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 30.11.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 10

AUFGABE 10.1:

Zeige, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}_5, \cdot)^*$ die [2] als erzeugendes Element besitzt. Zeige weiterhin, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)^*$ kein erzeugendes Element besitzt.

AUFGABE 10.2:

In dieser Aufgabe betrachten wir Permutationen in Zweizeilenform. Im konkreten Fall heißt das, die bijektive Abbildung $p : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 6\}$ wird wie folgt notiert:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) \end{pmatrix}.$$

Gegeben seien die beiden Permutationen $\sigma, \pi \in \mathcal{S}_6$, definiert durch:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bilde die Permutationen $\sigma\pi$, $\pi\sigma$, σ^{-1}, π^{-1}.

b) Bestimme die Lösung $x \in \mathcal{S}_6$ der Gleichung $\sigma x = \pi$.

c) Bestimme $\operatorname{ord}_{\mathcal{S}_6}(\sigma)$. Bilde dazu σ^i für $i = 1, 2, \ldots$, bis $\sigma^i = id$ gilt (id bezeichnet hier die Identitätsabbildung auf $\{1, \ldots, 6\}$).

AUFGABE 10.3:

a) Bestimme alle Elemente und deren Ordnungen in $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot)^*$.

b) Setze die partielle Abbildung ϕ, gegeben durch

$$\phi([1]) = (0, 0)$$
$$\phi([2]) = (0, 1)$$
$$\phi([7]) = (1, 1)$$

zu einem Gruppenisomorphismus $\phi : (\mathbb{Z}_{15}, \cdot)^* \to (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_4, +)$ fort.

AUFGABE 10.4:

Es seien G und G' Gruppen und $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

a) Zeige, dass für alle $g \in G$ gilt: $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

b) Zeige: falls f bijektiv ist, so gilt $\operatorname{ord}_G(g) = \operatorname{ord}_{G'}(f(g))$ für alle $g \in G$.

AUFGABE 10.5:

Es seien $G = (G, \circ)$ eine Gruppe und $g \in G$ ein Gruppenelement mit Ordnung $\mathrm{ord}_G(g) = k$. Beweise die folgenden Behauptungen.

a) Die Funktion $f : (\mathbb{Z}_k, +) \to \langle g \rangle$ mit $f([j]) = g^j$ ist ein Gruppenisomorphismus.

b) Falls $\mathrm{ord}_G(g) = \infty$, so ist $f : (\mathbb{Z}, +) \to \langle g \rangle$ mit $f(j) = g^j$ ein Gruppenisomorphismus.