Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 16.11.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 8

AUFGABE 8.1:

Sei $(M, \circ)$ ein Monoid und $a, b \in M$, mit $a \neq b$. Ist es möglich, dass sowohl a als auch b dasselbe inverse Element haben, d. h. $a^{-1} = b^{-1} \in M$?

AUFGABE 8.2:

Untersuche, ob die folgenden Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ assoziativ oder kommutativ sind und ob es linksneutrale oder rechtsneutrale Elemente gibt.

Beachte dabei:

- Ein Element $e \in M$ heißt linksneutral (bzw. rechtsneutral) bzgl. einer Verknüpfung $\circ$ auf M g.d.w. $\forall x \in M : e \circ x = x$ (bzw. $x \circ e = x$). Wenn e linksneutral und rechtsneutral ist, so heißt es neutrales Element.
- Die zur Definition der Verknüpfungen $\star$, $\bullet$ und $\diamond$ verwendeten Terme a^b, $a + 2b$ und $a + b + ab$ sind mit den entsprechenden Operationen und Regeln der Schulmathematik zu berechnen (vgl. angegebene Beispiele).

a) $a \star b := a^b$ (also bspw. $2 \star 3 = 2^3 = 8$)

b) $a \bullet b := a + 2b$ (also bspw. $3 \bullet 5 = 3 + 2 \cdot 5 = 13$)

c) $a \diamond b := a + b + ab$ (also bspw. $2 \diamond 3 = 2 + 3 + 2 \cdot 3 = 11$)

AUFGABE 8.3:

Die Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei definiert durch: $(a, b) * (c, d) := (a \cdot c, a \cdot d)$. Die zur Definition der Verknüpfung $*$ verwendeten Terme ac und ad sind hier wiederum mit den entsprechenden Operationen und Regeln der Schulmathematik zu berechnen, also bspw.: $(2, 3) * (5, 7) = (2 \cdot 5, 2 \cdot 7) = (10, 14)$.

a) Ist die Verknüpfung $*$ assoziativ? Ist sie kommutativ?

b) Gibt es bzgl. $*$ linksneutrale Elemente? Gibt es rechtsneutrale Elemente?

AUFGABE 8.4:

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Halbgruppe $(M, \circ)$ mit $M = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ und der Abbildung $\circ : M \times M \to M$, gegeben durch:

$\circ$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$

(Die Tatsache, dass die so definierten Abbildung $\circ$ tatsächlich assoziativ ist und $(M, \circ)$ folglich die Voraussetzungen einer Halbgruppe erfüllt, kann hier ohne Beweis als bekannt vorausgesetzt werden.)

a) Ist $(M, \circ)$ ein Monoid? Falls ja, so gib das entsprechende neutrale Element an.

b) Gib, sofern existent, jeweils das inverse Element der Elemente in M an.

c) Handelt es sich bei $(M, \circ)$ um eine Gruppe?

AUFGABE 8.5:

Konstruiere jeweils die Gruppentafel für $(\mathbb{Z}_7, \cdot)^*$ und $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)^*$. Gib zudem für jedes Element das zugehörige inverse Element an.