Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 16.11.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 8

AUFGABE 8.1:

Sei $(M, \circ)$ ein Monoid und $a, b \in M$, mit $a \neq b$. Ist es möglich, dass sowohl a als auch b dasselbe inverse Element haben, d. h. $a^{-1} = b^{-1} \in M$?

Sei e das neutrale Element. Aus $a \circ a^{-1} = e$, $b \circ b^{-1} = e$ und $a^{-1} = b^{-1}$ folgt:

$$\begin{aligned} & a \circ a^{-1} = b \circ a^{-1} \\ \Longrightarrow\ & a \circ a^{-1} \circ a = b \circ a^{-1} \circ a \\ \Longrightarrow\ & a \circ e = b \circ e \end{aligned}$$

und damit $a = b$.

AUFGABE 8.2:

Untersuche, ob die folgenden Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ assoziativ oder kommutativ sind und ob es linksneutrale oder rechtsneutrale Elemente gibt.

Beachte dabei:

- Ein Element $e \in M$ heißt linksneutral (bzw. rechtsneutral) bzgl. einer Verknüpfung $\circ$ auf M g.d.w. $\forall x \in M : e \circ x = x$ (bzw. $x \circ e = x$). Wenn e linksneutral und rechtsneutral ist, so heißt es neutrales Element.
- Die zur Definition der Verknüpfungen $\star$, $\bullet$ und $\diamond$ verwendeten Terme a^b, $a + 2b$ und $a + b + ab$ sind mit den entsprechenden Operationen und Regeln der Schulmathematik zu berechnen (vgl. angegebene Beispiele).

a) $a \star b := a^b$ (also bspw. $2 \star 3 = 2^3 = 8$)

assoziativ: Nein, z. B. $(2 \star 1) \star 3 = 2^1 \star 3 = 2^3 = 8$, aber $2 \star (1 \star 3) = 2 \star 1^3 = 2^1 = 2$.

kommutativ: Nein, z. B. $2 \star 1 = 2^1 = 2$, aber $1 \star 2 = 1^2 = 1$.

linksneutrale Elemenet: Keine, sonst müsste gelten $\forall x \in \mathbb{R} : x = e \star x$, also $x = e^x$; für zwei verschiedene Wahlen von x (z. B. $x = 1$ und $x = 2$) ergibt dies einen Widerspruch.

rechtsneutrale Elemente: Ja, eines: $e = 1$. Es gilt $\forall x \in \mathbb{R} : x \star 1 = x^1 = x$.

b) $a \bullet b := a + 2b$ (also bspw. $3 \bullet 5 = 3 + 2 \cdot 5 = 13$)

assoziativ: Nein, z. B. $(1 \bullet 2) \bullet 3 = (1 + 4) \bullet 3 = 5 \bullet 3 = 5 + 6 = 11$, aber $1 \bullet (2 \bullet 3) = 1 \bullet (2 + 6) = 1 \bullet 8 = 1 + 16 = 17$.

kommutativ: Nein, z. B. $2 \bullet 3 = 2 + 6 = 8$, aber $3 \bullet 2 = 3 + 4 = 7$.

linksneutrale Elemente: Keine, sonst müsste gelten $\forall x \in \mathbb{R} : x = e \bullet x$, also $x = e + 2x$ und damit $e = -x$; für zwei verschiedene Wahlen von x ergibt dies einen Widerspruch.

rechtsneutrale Elemente: Ja, eines: $e = 0$. *Es gilt* $\forall x \in \mathbb{R} : x \bullet 0 = x + 0 = x$.

c) $a \diamond b := a + b + ab$ (also bspw. $2 \diamond 3 = 2 + 3 + 2 \cdot 3 = 11$)

assoziativ: Ja, es gilt $(a \diamond b) \diamond c = (a + b + ab) \diamond c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)\, c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$, *aber auch* $a \diamond (b \diamond c) = a \diamond (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a\,(b + c + bc) = a + b + c + ab + ac + bc + abc$.

kommutativ: Ja, es gilt $a \diamond b = a + b + ab = b + a + ba = b \diamond a$.

linksneutrale Elemente: Ja, eines: $e = 0$. *Es gilt* $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \diamond x = 0 + x + 0 \cdot x = x$.

rechtsneutrale Elemente: Ja, eines: $e = 0$. *Es gilt* $\forall x \in \mathbb{R} : x \diamond 0 = x + 0 + x \cdot 0 = x$.

AUFGABE 8.3:

Die Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sei definiert durch: $(a, b)*(c, d) := (a \cdot c, a \cdot d)$. Die zur Definition der Verknüpfung $*$ verwendeten Terme ac und ad sind hier wiederum mit den entsprechenden Operationen und Regeln der Schulmathematik zu berechnen, also bspw.: $(2, 3) * (5, 7) = (2 \cdot 5, 2 \cdot 7) = (10, 14)$.

a) Ist die Verknüpfung $*$ assoziativ? Ist sie kommutativ?

assoziativ: Ja, es gilt $((a, b) * (a', b')) * (a'', b'') = (aa', ab') * (a'', b'') = (aa'a'', aa'b'')$, *aber auch* $(a, b) * ((a', b') * (a'', b'')) = (a, b) * (a'a'', a'b'') = (aa'a'', aa'b'')$.

kommutativ: Nein, z. B. $(1, 2) * (2, 3) = (2, 3)$, *aber* $(2, 3) * (1, 2) = (2, 4)$.

b) Gibt es bzgl. $*$ linksneutrale Elemente? Gibt es rechtsneutrale Elemente?

linksneutrale Elemente: Ja, sogar beliebig viele. Sei $e = (1, b)$ *für ein beliebiges* $b \in \mathbb{Z}$. *Es gilt* $\forall\,(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (1, b) * (c, d) = (1 \cdot c, 1 \cdot d) = (c, d)$.

rechtsneutrale Elemente: Nein, sonst müsste gelten $\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$, *also* $(a \cdot e_1, a \cdot e_2) = (a, b)$ *und damit* $a \cdot e_2 = b$; *die letzte Gleichung hat aber z. B. für* $a = 2$ *und* $b = 1$ *keine Lösung in* $\mathbb{Z}$.

AUFGABE 8.4:

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Halbgruppe $(M, \circ)$ mit $M = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ und der Abbildung $\circ : M \times M \to M$, gegeben durch:

$\circ$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$

(Die Tatsache, dass die so definierten Abbildung $\circ$ tatsächlich assoziativ ist und $(M, \circ)$ folglich die Voraussetzungen einer Halbgruppe erfüllt, kann hier ohne Beweis als bekannt vorausgesetzt werden.)

a) Ist $(M, \circ)$ ein Monoid? Falls ja, so gib das entsprechende neutrale Element an.

$(M, \circ)$ *ist ein Monoid, da* $(M, \circ)$ *gemäß Aufgabenstellung eine Halbgruppe ist und zudem das neutrale Element* $\spadesuit$ *besitzt (denn* $\forall x \in M : x \circ \spadesuit = \spadesuit \circ x = x$, *vgl. Tabelle).*

b) Gib, sofern existent, jeweils das inverse Element der Elemente in M an.

Wir wissen aus (a), dass $(M, \circ)$ ein Monoid mit dem neutralem Element $\spadesuit$ ist und beobachten:

i) $\heartsuit^{-1} = \clubsuit$, *denn* $\heartsuit \circ \clubsuit = \clubsuit \circ \heartsuit = \spadesuit$.

ii) $\spadesuit^{-1} = \spadesuit$, *denn* $\spadesuit \circ \spadesuit = \spadesuit$.

iii) $\clubsuit^{-1} = \heartsuit$, *denn* $\clubsuit \circ \heartsuit = \heartsuit \circ \clubsuit = \spadesuit$.

c) Handelt es sich bei $(M, \circ)$ um eine Gruppe?

Ja, denn aus (a) wissen wir, dass $(M, \circ)$ ein Monoid ist, und aus (b) wissen wir, dass zu jedem der Elemente in M jeweils ein inverses Element in M existiert.

AUFGABE 8.5:

Konstruiere jeweils die Gruppentafel für $(\mathbb{Z}_7, \cdot)^*$ und $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)^*$. Gib zudem für jedes Element das zugehörige inverse Element an.

$(\mathbb{Z}_7, \cdot)^*$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Inverse in $(\mathbb{Z}_7, \cdot)^*$: $[1]^{-1} = [1]$; $[2]^{-1} = [4]$; $[3]^{-1} = [5]$; $[4]^{-1} = [2]$; $[5]^{-1} = 3$; $[6]^{-1} = [6]$.

Nicht alle Elemente in $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ enhalten ein Inverses. Für $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ergibt die Operation $x \cdot y \mod 12$ immer eine gerade Zahl. Somit besitzen die Elemente [2], [4], [6], [8] und [10] keine Inversen in $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ und sind somit keine Elemente von $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)^*$.
Für die [3] und die [9] erhalten wir durch Ausprobieren, dass für diese ebenfalls keine inversen Elemente existieren.

$(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)^*$	$[1]$	$[5]$	$[7]$	$[11]$
$[1]$	$[1]$	$[5]$	$[7]$	$[11]$
$[5]$	$[5]$	$[1]$	$[11]$	$[7]$
$[7]$	$[7]$	$[11]$	$[1]$	$[5]$
$[11]$	$[11]$	$[7]$	$[5]$	$[1]$

Inverse in $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)^*$*:* $[1]^{-1} = [1]$*;* $[5]^{-1} = [5]$*;* $[7]^{-1} = [7]$*;* $[11]^{-1} = [11]$.