Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 09.11.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 7

Vorab: Wenn wir in dieser Veranstaltung von Graphen sprechen, meinen wir damit ausschließlich Graphen **ohne Schleifen**, d. h. $\forall v \in V : (v, v) \notin E$.

AUFGABE 7.1:

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und V eine n-elementige Menge von Knoten.

a) Wie viele ungerichtete Graphen über V gibt es?

b) Wie viele gerichtete Graphen über V gibt es?

AUFGABE 7.2:

Um wie viel kann sich die Anzahl der starken Zusammenhangskomponenten eines gerichteten Graphen mit $n \in \mathbb{N}^+$ Knoten höchstens ändern, wenn eine einzige Kante hinzugefügt wird?

AUFGABE 7.3:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Wir definieren die folgende Relation $R_G \subseteq V \times V$ bzgl. G:

$$R_G := \{(u, v) \in V \times V \mid \text{in } G \text{ ist } v \text{ von } u \text{ aus erreichbar}\}.$$

a) Zeige, dass es sich bei R_G um eine Äquivalenzrelation handelt. (Die Äquivalenzklassen von R_G entsprechen den Zusammenhangskomponenten von G.)

b) Wäre R_G auch im Falle eines gerichteten Graphen G stets eine Äquivalenzrelation? Begründe deine Antwort.

AUFGABE 7.4:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| = n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Zeige, dass G zusammenhängend ist, wenn $\deg_G(v) \geq \frac{1}{2}(n-1)$ für jeden Knoten $v \in V$ gilt. ($\deg_G(v)$ bezeichnet den Grad des Knotens $v \in V$ im ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, sprich: $\deg_G(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$.)

AUFGABE 7.5:

In dieser Aufgabe betrachten wir den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $E = \{(a, b), (b, f), (c, d), (d, e), (e, d), (e, f), (f, a)\}$. Die Relation des starken Zusammenhangs ist eine Äquivalenzrelation über V. Gib für den Graphen G die Äquivalenzrelation des starken Zusammenhangs in Tupelschreibweise an und bestimme alle Äquivalenzklassen.

AUFGABE 7.6:

Sei $k \in \mathbb{N}^+$ mit $k \geq 2$. Ein gerichteter Baum $T = (V, E)$ mit Wurzel s heißt k-när, falls $\text{outdeg}_T(v) \leq k$ für alle $v \in V$ gilt. Wie viele

i) Blätter,

ii) innere Knoten,

iii) Knoten (insgesamt)

kann ein solcher k-närer Baum der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ höchstens haben? Gib jeweils eine entsprechende geschlossene Formel[1], die von k und d abhängt, an und beweise deine Behauptungen!

Hinweis: Wenn wir in dieser Aufgabe von *Bäumen* sprechen, beziehen wir uns dabei stets auf *gerichtete Bäume mit Wurzel*. Alle Knoten eines Baumes, welche keine Blätter sind, werden als *innere Knoten* bezeichnet.

[1]In dieser Aufgabe bedeutet dies konkret, dass du jeweils eine entsprechende Formel finden sollst, in der keine Ausdrücke der Form $\sum_{i=m}^{n} a_i$ vorkommen (a_i steht hier für einen beliebigen, potenziell von i abhängigen Term). Beispielsweise stellt $\frac{n(n+1)}{2}$ eine geschlossene Formel zur Berechnung der Summe der ersten n natürlichen Zahlen dar, wohingegen $\sum_{i=1}^{n} i$ keine geschlossene Formel ist.