Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 09.11.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 7

Vorab: Wenn wir in dieser Veranstaltung von Graphen sprechen, meinen wir damit ausschließlich Graphen **ohne Schleifen**, d. h. $\forall v \in V : (v, v) \notin E$.

AUFGABE 7.1:

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und V eine n-elementige Menge von Knoten.

a) Wie viele ungerichtete Graphen über V gibt es?

Die Anzahl aller ungerichteten Graphen über V ergibt sich als die Anzahl aller möglichen Kantenmengen $E \subseteq \tilde{E} := \{\{i,j\} \mid i,j \in V,\ i \neq j\}$, wobei $\tilde{E}$ offenbar gerade die Kantenmenge des vollständigen ungerichteten Graphen über V bezeichnet und $\left|\tilde{E}\right| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ gilt. Gesucht ist also die Anzahl der Teilmengen von $\tilde{E}$, sprich, die Mächtigkeit $\left|\mathcal{P}\left(\tilde{E}\right)\right|$ der Potenzmenge von $\tilde{E}$. Wir wissen, dass sich diese für jede endliche Menge A als $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ berechnen lässt und folgern, dass es $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ungerichtete Graphen über V gibt.

b) Wie viele gerichtete Graphen über V gibt es?

Analog zu Aufgabenteil (a) mit $\tilde{E} := \{(i,j) \mid i,j \in V,\ i \neq j\}$ und $\left|\tilde{E}\right| = n(n-1)$. Folglich gibt es $2^{n(n-1)}$ gerichtete Graphen über V.

AUFGABE 7.2:

Um wie viel kann sich die Anzahl der starken Zusammenhangskomponenten eines gerichteten Graphen mit $n \in \mathbb{N}^+$ Knoten höchstens ändern, wenn eine einzige Kante hinzugefügt wird?

Ein Graph mit n Knoten hat wenigstens 1 und höchstens n starke Zusammenhangskomponenten. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine Änderung von $n-1$ tatsächlich möglich ist: Füge die Kante $n \to 1$ zum Graphen $1 \to 2 \to \cdots \to n$ hinzu.

AUFGABE 7.3:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Wir definieren die folgende Relation $R_G \subseteq V \times V$ bzgl. G:

$$R_G := \{(u,v) \in V \times V \mid \text{in } G \text{ ist } v \text{ von } u \text{ aus erreichbar}\}.$$

a) Zeige, dass es sich bei R_G um eine Äquivalenzrelation handelt. (Die Äquivalenzklassen von R_G entsprechen den Zusammenhangskomponenten von G.)

Wir prüfen die betreffenden Eigenschaften von R_G:

– *reflexiv: Ja. Jeder Knoten ist trivialerweise von sich selbst aus erreichbar und somit gilt:*

$$\forall u \in V : (u,u) \in R_G.$$

- *symmetrisch: Ja. In einem ungerichteten Graphen gilt offenbar, dass der Knoten v genau dann vom Knoten u aus erreichbar ist, wenn u von v aus erreichbar ist. Somit gilt:*

$$\forall u, v \in V : ((u, v) \in R_G \Rightarrow (v, u) \in R_G) .$$

- *transitiv: Ja. Seien $u, v, w \in V$ und es gelte $(u, v) \in R_G$ sowie $(v, w) \in R_G$. Gemäß Definition von R_G bedeutet $(u, v) \in R_G$ (bzw. $(v, w) \in R_G$), dass in G der Knoten v von u (bzw. w von v) aus erreichbar ist. Damit ist in G aber auch w von u aus erreichbar und es gilt $(u, w) \in R_G$. Allgemein gilt also:*

$$\forall u, v, w \in V : (((u, v) \in R_G \land (v, w) \in R_G) \Rightarrow (u, w) \in R_G) .$$

b) Wäre R_G auch im Falle eines gerichteten Graphen G stets eine Äquivalenzrelation? Begründe deine Antwort.

Nein. Ist in einem ungerichteten Graphen v von u aus erreichbar, so impliziert dies, dass u auch von v aus erreichbar ist. Für gerichtete Graphen ist dies nicht der Fall.

AUFGABE 7.4:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| = n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Zeige, dass G zusammenhängend ist, wenn $\deg_G(v) \geq \frac{1}{2}(n-1)$ für jeden Knoten $v \in V$ gilt. ($\deg_G(v)$ bezeichnet den Grad des Knotens $v \in V$ im ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, sprich: $\deg_G(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$.)

Angenommen, G ist nicht zusammenhängend. Sei $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ $(k \geq 2)$ die entsprechende disjunkte Zerlegung von V in Zusammenhangskomponenten. Da gemäß Voraussetzung $\deg_G(v) \geq \frac{1}{2}(n-1)$ für jeden Knoten $v \in V$ gilt, müssen in jeder Komponente mindestens $1 + \frac{1}{2}(n-1)$ Knoten sein, also

$$n = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \geq k\left(\frac{1}{2}(n-1) + 1\right) \overset{k\geq 2}{\geq} n+1,$$

ein Widerspruch.

AUFGABE 7.5:

In dieser Aufgabe betrachten wir den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $E = \{(a, b), (b, f), (c, b), (d, e), (e, d), (e, f), (f, a)\}$. Die Relation des starken Zusammenhangs ist eine Äquivalenzrelation R über V. Gib für den Graphen G die Äquivalenzrelation des starken Zusammenhangs in Tupelschreibweise an und bestimme alle Äquivalenzklassen.

Die drei Äquivalenzklassen sind $[a]_R = \{a, b, f\}$, $[d]_R = \{d, e\}$ und $[c]_R = \{c\}$. Die Äquivalenzrelation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} R = &\{(a, a), (a, b), (a, f), (b, a), (b, b), (b, f), (f, a), (f, b), (f, f)\} \\ &\cup \{(d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\} \\ &\cup \{(c, c)\}. \end{aligned}$$

AUFGABE 7.6:

Sei $k \in \mathbb{N}^+$ mit $k \geq 2$. Ein gerichteter Baum $T = (V, E)$ mit Wurzel s heißt k-när, falls $\operatorname{outdeg}_T(v) \leq k$ für alle $v \in V$ gilt. Wie viele

i) Blätter,

ii) innere Knoten,

iii) Knoten (insgesamt)

kann ein solcher k-närer Baum der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ höchstens haben? Gib jeweils eine entsprechende geschlossene Formel[1], die von k und d abhängt, an und beweise deine Behauptungen!

Hinweis: Wenn wir in dieser Aufgabe von *Bäumen* sprechen, beziehen wir uns dabei stets auf *gerichtete Bäume mit Wurzel.* Alle Knoten eines Baumes, welche keine Blätter sind, werden als *innere Knoten* bezeichnet.

zu i) *Behauptung: Ein k-närer Baum der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ hat höchstens k^d Blätter.*

Wir zeigen die Behauptung mittels Induktion über d.

(IA) ($d = 0$)**:** *Ein k-närer Baum der Tiefe 0 besitzt offenbar höchstens einen einzigen Knoten (die Wurzel), der in diesem Fall dann auch gleichzeitig das einzige Blatt darstellt, sprich: Die Anzahl der Blätter beträgt höchstens $k^0 = 1$.*

(IV): *Sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert und die Behauptung gelte für alle k-nären Bäume der Tiefe kleiner oder gleich d.*

(IS): *Wir zeigen nun, dass die Behauptung dann auch für k-näre Bäume der Tiefe $d+1$ gilt. Sei $T = (V, E)$ also ein k-närer Baum der Tiefe $d+1$ mit Wurzel s. Da T k-när ist, hat die Menge $S(s) = \{v \in V \mid (s, v) \in E\}$ der Nachfolger von s höchstens k Elemente. Sei $s' \in S(s)$ beliebig fixiert und $T' = (V', E')$ jener (ebenfalls k-näre) Teil-/Unterbaum von T, dessen Wurzel s' ist. Offenbar hat T' höchstens die Tiefe d und somit gemäß IV höchstens k^d $(= \max\{k^i \mid i \in \mathbb{N}, i \leq d\})$ Blätter. Da s höchstens k Nachfolgeknoten in T hat (s. o.) und T somit höchstens k entsprechende Teilbäume mit Wurzel aus $S(s)$ besitzt (die wiederum jeweils höchstens k^d Blätter haben), ist $k \cdot k^d = k^{d+1}$ eine obere Schranke für die Anzahl der Blätter eines k-nären Baumes der Tiefe $d+1$.*

zu ii) *Behauptung: Ein k-närer Baum der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ hat höchstens $\frac{k^d - 1}{k-1}$ innere Knoten.*

Wir zeigen die Behauptung mittels Induktion über d.

(IA) ($d = 0$)**:** *Ein k-närer Baum der Tiefe 0 besitzt offenbar höchstens einen einzigen Knoten (die Wurzel), der in diesem Fall dann auch gleichzeitig das einzige Blatt darstellt und somit kein innerer Knoten ist, sprich: Die Anzahl der inneren Knoten beträgt höchstens $\frac{k^0 - 1}{k-1} = 0$.*

(IV): *Die Behauptung gelte für ein beliebiges (aber fixiertes) $d \in \mathbb{N}$.*

[1] In dieser Aufgabe bedeutet dies konkret, dass du jeweils eine entsprechende Formel finden sollst, in der keine Ausdrücke der Form $\sum_{i=m}^{n} a_i$ vorkommen (a_i steht hier für einen beliebigen, potenziell von i abhängigen Term). Beispielsweise stellt $\frac{n(n+1)}{2}$ eine geschlossene Formel zur Berechnung der Summe der ersten n positiven natürlichen Zahlen dar, wohingegen $\sum_{i=1}^{n} i$ keine geschlossene Formel ist.

(IS): *Wir zeigen nun, dass die Behauptung dann auch für k-näre Bäume der Tiefe $d+1$ gilt. Sei $T = (V, E)$ also ein k-närer Baum der Tiefe $d+1$ mit Wurzel s. Seien weiterhin $V_I \subseteq V$ die Menge der inneren Knoten von T und $V_B \subseteq V$ die Menge der Blätter von T. Offenbar sind V_I und V_B disjunkt und es gilt $V_I \cup V_B = V$. Wir definieren $T' := (V_I, E')$ mit*

$$E' := \{(u, v) \in E \mid u, v \in V_I\} = \{(u, v) \in E \mid v \in V_I\} = \{(u, v) \in E \mid v \notin V_B\}$$

und beobachten, dass T' ein k-närer Baum der Tiefe d mit Wurzel s ist. Laut IV besitzt T' höchstens $\frac{k^d-1}{k-1}$ innere Knoten und aus Aufgabenteil (i) wissen wir zudem, dass T' höchstens k^d Blätter hat. Die Gesamtzahl der Knoten von T' beträgt also höchstens

$$|V_I| \leq \frac{k^d - 1}{k - 1} + k^d = \frac{k^d - 1 + k^{d+1} - k^d}{k - 1} = \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1}.$$

Dies beweist auch unsere Behauptung, da V_I ursprünglich als die Menge der inneren Knoten von T gewählt wurde.

zu iii) *Behauptung: Ein k-närer Baum der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ hat höchstens $\frac{k^{d+1}-1}{k-1}$ Knoten (insgesamt).*

Die Behauptung ergibt sich unmittelbar durch Addition der bereits bewiesenen oberen Schranken für die Anzahl der inneren Knoten (ii) bzw. Blätter (i) eines k-nären Baums $T = (V, E)$ der Tiefe $d \in \mathbb{N}$, sprich:

$$|V| \leq \frac{k^d - 1}{k - 1} + k^d = \frac{k^d - 1 + k^{d+1} - k^d}{k - 1} = \frac{k^{d+1} - 1}{k - 1}.$$