Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 02.11.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 6

AUFGABE 6.1:

Sei X eine nichtleere, endliche Menge. In dieser Aufgabe betrachten wir die Relation *Verfeinerung* $\prec$ auf der Menge

$$\mathrm{Part}_X = \{\Pi \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \Pi \text{ ist eine Partition von } X\},$$

definiert durch:

Π heißt Verfeinerung von Π' (also: $\Pi \prec \Pi'$), falls $\forall M \in \Pi : \exists M' \in \Pi' : M \subseteq M'$.

Man zeige, dass $\prec$ eine Halbordnungsrelation ist und bestimme das Minimum und das Maximum von Part_X bzgl. $\prec$.

Reflexiv: *Klar.*
Transitiv: *Sei $\Pi \prec \Pi'$ und $\Pi' \prec \Pi''$. Wegen $\Pi \prec \Pi'$ gilt*

$$\forall M \in \Pi : \exists M' \in \Pi' : M \subseteq M'$$

und wegen $\Pi' \prec \Pi''$ gilt

$$\forall M' \in \Pi' : \exists M'' \in \Pi'' : M' \subseteq M'',$$

woraus folgt

$$\forall M \in \Pi : \exists M'' \in \Pi'' : M \subseteq M'',$$

also $\Pi \prec \Pi''$.
Antisymmetrisch: *Sei $\Pi \prec \Pi'$ und $\Pi' \prec \Pi$.*
Fixiere beliebiges $M \in \Pi$.
$\Rightarrow \exists M' \in \Pi' : M \subseteq M'$ *(da $\Pi \prec \Pi'$)*
$\Rightarrow \exists \tilde{M} \in \Pi : M \subseteq M' \subseteq \tilde{M}$ *(da $\Pi' \prec \Pi$)*
$\Rightarrow M = \tilde{M}$ *(Da M und $\tilde{M}$ beides Elemente der Partition Π sind und somit entweder disjunkt sein oder dieselbe Menge bezeichnen müssen. Disjunkt können M und $\tilde{M}$ hier jedoch nicht sein, da wir aus der vorangehenden Zeile wissen, dass $M \subseteq M' \subseteq \tilde{M}$ gilt, und M zudem als Element einer Partition definitionsgemäß nicht die leere Menge sein darf.)*
$\Rightarrow M' = M$ *(da $M \subseteq M' \subseteq \tilde{M}$)*
$\Rightarrow \Pi = \Pi'$ *(Da $M \in \Pi$ beliebig fixiert wurde und somit $\forall M \in \Pi : \exists M' \in \Pi' : M = M'$ folgt, was unmittelbar $\Pi = \Pi'$ impliziert, denn Π und Π' bezeichnen jeweils Partitionen der Menge X.)*
Minimum: *Feinste Partition $\Pi_{min} = \{\{x\} \mid x \in X\}$*
Maximum: *Gröbste Partition $\Pi_{max} = \{X\}$*

Anmerkung: *Überlege dir hier wiederum, warum das angegebene Minimum und das angegebene Maximum tatsächlich sämtliche Eigenschaften aus den entsprechenden Definitionen erfüllen.*

AUFGABE 6.2:

Gib die Kardinalitäten der folgenden Mengen an. Gib weiterhin für jede Menge jeweils ein darin enthaltenes Element an.

- $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $B := \{a, b, c\}$
- $C := \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$
- $D := \mathcal{P}(A)$
- $E := \mathcal{P}(B \times C)$
- $F := A \times C$
- $G := \big\{X \subseteq A \;\big|\; |X| = 3\big\}$
- $H := \big\{Y \subseteq C \;\big|\; |Y| = 5\big\}$
- $I := \mathcal{S}_4$
- $J := \{f : B \to C\}$
- $K := \{g : C \to B\}$
- $L := H \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$
- $M := K \times E$

$|A| = 5$ und $5 \in A$, $|B| = 3$ und $a \in B$, $|C| = 4$ und $\heartsuit \in C$, $|D| = 32$ und $\{1, 2, 5\} \in D$, $|E| = 4096$ und $\{(a, \spadesuit), (c, \diamondsuit)\} \in E$, $|F| = 20$ und $(3, \clubsuit) \in F$, $|G| = 10$ und $\{3, 4, 5\} \in G$, $|H| = 0$, $|I| = 24$ und $\{h(x) = x\} \subset I$, $|J| = 64$ und $\{f(x) = \spadesuit\} \subset J$, $|K| = 81$ und $\{g(x) = b\} \subset K$, $|L| = 0$, $|M| = 331776$ und $(g(x) = b, \{(a, \spadesuit), (c, \diamondsuit)\})$.

AUFGABE 6.3:

Man betrachte Bit-Strings (d. h. Folgen von Nullen und Einsen) der Länge $2n$.

a) Wie viele gibt es, die genau n Nullen enthalten?

Es gibt in einem hier betrachteten Bit-String $2n$ Positionen. Man kann das Problem so interpretieren, dass n Positionen ohne Zurücklegen ungeordnet gezogen werden, die dann den Wert 0 erhalten. Alle nicht gezogenen Positionen erhalten den Wert 1. Es folgt, dass es $\binom{2n}{n}$ solcher Bit-Strings gibt.

b) Wie viele gibt es, die mehr Nullen als Einsen enthalten?

Es gibt insgesamt 2^{2n} Bit-Strings der Länge $2n$. Wie oben gezeigt, gibt es $\binom{2n}{n}$ Bit-Strings der Länge $2n$, die gleich viele Nullen wie Einsen besitzen. Es gibt also $2^{2n} - \binom{2n}{n}$ Bit-Strings der Länge $2n$, die echt mehr Nullen oder echt mehr Einsen beinhalten. Offensichtlich muss es genauso viele Bit-Strings der Länge $2n$ geben, die echt mehr

Nullen als Einsen besizten, wie es Bit-Strings der Länge $2n$ gibt, die echt mehr Einsen als Nullen besitzen.[1] *Also ist der gesuchte Wert:*

$$\frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2} \ .$$

AUFGABE 6.4:

Berechne: $\left\{ {5 \atop 3} \right\}$, $\left\{ {7 \atop 4} \right\}$, $\left\{ {6 \atop 5} \right\}$.

Wir verwenden die aus der Vorlesung bekannten Formeln

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

und

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\left\{ {5 \atop 3} \right\} &= \left\{ {5-1 \atop 3-1} \right\} + 3 \cdot \left\{ {5-1 \atop 3} \right\} \\
&= \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left\{ {4 \atop 3} \right\} \\
&= \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left(\left\{ {4-1 \atop 3-1} \right\} + 3 \cdot \left\{ {4-1 \atop 3} \right\} \right) \\
&= \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left(\left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left\{ {3 \atop 3} \right\} \right) \\
&= \left(2^{4-1} - 1\right) + 3 \cdot \left(\left(2^{3-1} - 1\right) + 3 \cdot 1\right) \\
&= \left(2^{3} - 1\right) + 3 \cdot \left(\left(2^{2} - 1\right) + 3\right) \\
&= 7 + 3 \cdot (3 + 3) \\
&= 7 + 3 \cdot 6 \\
&= 25
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left\{ {7 \atop 4} \right\} &= \left\{ {6 \atop 3} \right\} + 4 \cdot \left\{ {6 \atop 4} \right\} \\
&= \left(\left\{ {5 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left\{ {5 \atop 3} \right\} \right) + 4 \cdot \left(\left\{ {5 \atop 3} \right\} + 4 \cdot \left\{ {5 \atop 4} \right\} \right) \\
&= \left(\left(2^{4} - 1\right) + 3 \cdot 25\right) + 4 \cdot \left(25 + 4 \cdot \left(\left\{ {4 \atop 3} \right\} + 4 \cdot \left\{ {4 \atop 4} \right\} \right)\right) \\
&= 90 + 4 \cdot (25 + 4 \cdot (6 + 4 \cdot 1)) \\
&= 90 + 4 \cdot (25 + 4 \cdot 10) \\
&= 90 + 4 \cdot 65 \\
&= 350
\end{aligned}$$

[1] Betrachte für einen beliebig fixierten Bit-String jeweils sein Inverses, das man erhält, indem alle Nullen durch Einsen und alle Einsen durch Nullen ersetzt werden.

und

$$\begin{aligned}
\left\{ 6 \atop 5 \right\} &= \left\{ 5 \atop 4 \right\} + 5 \cdot \left\{ 5 \atop 5 \right\} \\
&= 10 + 5 \cdot 1 \\
&= 15 \ .
\end{aligned}$$