Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 26.10.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 5

Auf diesem Übungsblatt beschäftigen wir uns unter anderem mit Halbordnungsrelationen.
Beachte: Das Maximum (bzw. Minimum) einer Menge U muss im Gegensatz zum Supremum (bzw. Infimum) von U selbst in U liegen! Zudem gilt offenbar, dass das Maximum (bzw. Minimum) einer Menge auch stets deren Supremum (bzw. Infimum) ist. Die Umkehrung gilt allerdings nicht zwangsläufig, genauer: liegt das Supremum (bzw. Infimum) einer Menge U in U, so ist es auch gleichzeitig das Maximum (bzw. Minimum) von U; liegt das Supremum (bzw. Infimum) einer Menge U jedoch nicht in U, so hat die Menge U kein Maximum (bzw. Minimum).

AUFGABE 5.1:

Es sei $\Pi = \{X_a \mid a \in A\}$ eine Partition einer nichtleeren Menge X. Die Relation R_Π sei dadurch definiert, dass für alle $x, y \in X$ gelte: $(x, y) \in R_\Pi$ genau dann, wenn x und y zu ein und derselben Menge X_a der Partition Π gehören.

Zeige: R_Π ist eine Äquivalenzrelation und $X/R_\Pi = \Pi$.

AUFGABE 5.2:

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Menge $X = \{0, \dots, 7\}$. Die Modulooperation $\bmod m$ gibt den Rest bei ganzzahliger Division durch m aus (vgl. Vorlesung), z. B. $13 \bmod 5 = 3$ und $-2 \bmod 5 = 3$.

a) Wie viele Äquivalenzklassen enthalten $\mathbb{Z}/R_{\mathrm{MOD}_2}$, $\mathbb{Z}/R_{\mathrm{MOD}_3}$ und $\mathbb{Z}/R_{\mathrm{MOD}_4}$?

b) Gib alle Äquivalenzklassen in X/R_{MOD_2}, X/R_{MOD_3} und X/R_{MOD_4} und die darin enthaltenen Elemente $x \in X$ an.

c) Gib die Äquivalenzrelation R_{MOD_4} auf X in Mengenschreibweise (unter konkreter Nennung der enthaltenen Elemente) an.

d) Sei $R_{\leq 5} = \{(x, y) \mid ((x \leq 5) \wedge (y \leq 5)) \vee ((x > 5) \wedge (y > 5))\} \subseteq X \times X$. Überlege dir, warum $R_{\leq 5}$ eine Äquivalenzrelation ist und gib alle Äquivalenzklassen in $X/R_{\leq 5}$ sowie die darin enthaltenen Elemente $x \in X$ an.

AUFGABE 5.3:

Gib im Folgenden jeweils eine entsprechende Grundmenge X und eine Relation $R \subseteq X \times X$ an. Die Begriffe *Maximum/Minimum* bzw. *maximale/minimale Elemente* beziehen sich dabei in dieser Aufgabe jeweils auf die Grundmenge X selbst.

a) Gib eine geordnete Menge (X, R) (sprich: R ist eine Ordnungsrelation, vgl. Vorlesung) an, die weder ein Minimum noch ein Maximum besitzt.

b) Gib eine halbgeordente Menge (X, R) (sprich: R ist eine Halbordnungsrelation, vgl. Vorlesung) an, die keine geordente Menge ist und ein Maximum besitzt.

c) Gib eine halbgeordente Menge (X, R) an, die keine geordente Menge ist und maximale und minimale Elemente, aber weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt.

AUFGABE 5.4:

Man zeige: Sei R eine Halbordnungsrelation auf X und sei $U \subseteq X$. Dann existiert (bzgl. R) höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum zu U in X.

Bemerkung: Aus der Eindeutigkeit des Supremums bzw. des Infimums von U (falls diese jeweils existieren) folgt dann unmittelbar auch die Eindeutigkeit des Maximums bzw. des Minimums von U (falls diese jeweils existieren). (vgl. die Bemerkung am Anfang dieses Übungsblattes)

AUFGABE 5.5:

Sei R eine Halbordnungsrelation auf X und sei U eine nichtleere, endliche Teilmenge von X. Man gebe möglichst kompakte Ausdrücke zur Berechnung des Supremums und des Infimums von U (bzgl. R) für folgende Fälle an:

a) $X = \mathbb{N}^+$
$R = \{(a, b) \mid a \text{ teilt } b\}$ (Teilbarkeitsrelation, vgl. Vorlesung)

b) $X = \mathcal{P}([n])$ (mit $n \in \mathbb{N}^+$ und $[n] := \{1, \ldots, n\}$)
$R = \{(S, T) \mid S \subseteq T\}$ (Inklusionsrelation, vgl. Vorlesung)