*Matthias Hamann*
*Alexander Moch*

Mannheim, den 26.10.2020

**CS 301 Formale Grundlagen der Informatik**, Herbstsemester 2020

# Lösungsskizze zum Übungsblatt 5

Auf diesem Übungsblatt beschäftigen wir uns unter anderem mit Halbordnungsrelationen.

**Beachte:** Das Maximum (bzw. Minimum) einer Menge $U$ muss im Gegensatz zum Supremum (bzw. Infimum) von $U$ selbst in $U$ liegen! Zudem gilt offenbar, dass das Maximum (bzw. Minimum) einer Menge auch stets deren Supremum (bzw. Infimum) ist. Die Umkehrung gilt allerdings nicht zwangsläufig, genauer: liegt das Supremum (bzw. Infimum) einer Menge $U$ in $U$, so ist es auch gleichzeitig das Maximum (bzw. Minimum) von $U$; liegt das Supremum (bzw. Infimum) einer Menge $U$ jedoch nicht in $U$, so hat die Menge $U$ kein Maximum (bzw. Minimum).

## AUFGABE 5.1:

Es sei $\Pi = \{X_a \mid a \in A\}$ eine Partition einer nichtleeren Menge $X$. Die Relation $R_\Pi$ sei dadurch definiert, dass für alle $x, y \in X$ gelte: $(x, y) \in R_\Pi$ genau dann, wenn $x$ und $y$ zu ein und derselben Menge $X_a$ der Partition $\Pi$ gehören.

Zeige: $R_\Pi$ ist eine Äquivalenzrelation und $X/R_\Pi = \Pi$.

*Die Relation $R_\Pi$ ist offentsichtlich reflexiv, da $x$ trivialerweise in derselben Menge $X_a$ liegt, wie $x$. Die Relation $R_\Pi$ ist symmetrisch, da sowohl $(x, y) \in R_\Pi$ als auch $(y, x) \in R_\Pi$ bedeuten, dass $x$ und $y$ in derselben Menge $X_a$ liegen. Gilt $(x, y) \in R_\Pi$ und $(y, z) \in R_\Pi$, so folgt, dass $x$, $y$ und $z$ in ein und derselben Menge $X_a$ liegen, also gilt auch $(x, z) \in R_\Pi$*
*Gemäß Definition gilt*

- $[x]_{R_\Pi} = \{y \mid (x, y) \in R_\Pi\}$, *und*
- $(x, y) \in R_\Pi$ *genau dann, wenn $x$ und $y$ zu derselben Menge $X_a$ der Partition $\Pi$ gehören.*

*Also bestehen die Äquivalenzklassen aus allen Elementnden, welche zu derselben Mengen $X_a$ der Partition $\Pi$ gehören. Daher gilt $X \backslash R_\Pi = \Pi$.*

## AUFGABE 5.2:

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Menge $X = \{0, \ldots, 7\}$. Die Modulooperation $\bmod m$ gibt den Rest bei ganzzahliger Division durch $m$ aus (vgl. Vorlesung), z. B. $13 \bmod 5 = 3$ und $-2 \bmod 5 = 3$.

**a)** Wie viele Äquivalenzklassen enthalten $\mathbb{Z}/R_{\text{MOD}_2}$, $\mathbb{Z}/R_{\text{MOD}_3}$ und $\mathbb{Z}/R_{\text{MOD}_4}$?

$\mathbb{Z}/R_{\textsf{mod}\,x}$ *enthält jeweils $x$ Äquivalenzklassen.*

**b)** Gib alle Äquivalenzklassen in $X/R_{\text{MOD}_2}$, $X/R_{\text{MOD}_3}$ und $X/R_{\text{MOD}_4}$ und die darin enthaltenen Elemente $x \in X$ an.

$M/R_{\textsf{mod}\,2}$ *enthält die Äquivalenzklassen* $[0] = \{0, 2, 4, 6\}$ *und* $[1] = \{1, 3, 5, 7\}$. $M/R_{\textsf{mod}\,3}$ *enthält die Äquivalenzklassen* $[0] = \{0, 3, 6\}$, $[1] = \{1, 4, 7\}$ *und* $[2] = \{2, 5\}$. $M/R_{\textsf{mod}\,4}$ *enthält die Äquivalenzklassen* $[0] = \{0, 4\}$, $[1] = \{1, 5\}$, $[2] = \{2, 6\}$ *und* $[3] = \{3, 7\}$.

**c)** Gib die Äquivalenzrelation $R_{\text{MOD}_4}$ auf $X$ in Mengenschreibweise (unter konkreter Nennung der enthaltenen Elemente) an.

$$\{(0,0),(0,4),(4,0),(4.4),(1,1),(1,5),(5,1),(5,5),\\ (2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(3,3),(3,7),(7,3),(7,7)\}$$

**d)** Sei $R_{\leq 5} = \{(x,y) \mid ((x \leq 5) \wedge (y \leq 5)) \vee ((x > 5) \wedge (y > 5))\} \subseteq X \times X$. Überlege dir, warum $R_{\leq 5}$ eine Äquivalenzrelation ist und gib alle Äquivalenzklassen in $X/R_{\leq 5}$ sowie die darin enthaltenen Elemente $x \in X$ an.

*Es exisitieren die beiden Äquivalenzklassen* $\{0,1,2,3,4,5\}$ *und* $\{6,7\}$.

## AUFGABE 5.3:

Gib im Folgenden jeweils eine entsprechende Grundmenge $X$ und eine Relation $R \subseteq X \times X$ an. Die Begriffe *Maximum/Minimum* bzw. *maximale/minimale Elemente* beziehen sich dabei in dieser Aufgabe jeweils auf die Grundmenge $X$ selbst.

**a)** Gib eine geordnete Menge $(X,R)$ (sprich: $R$ ist eine Ordnungsrelation, vgl. Vorlesung) an, die weder ein Minimum noch ein Maximum besitzt.

*Betrachte die Menge der ganzen Zahlen, also* $X = \mathbb{Z}$, *und die Relation* $\leq$ *(„$\leq$" bezeichnet hier den entsprechenden Größenvergleich ganzer Zahlen).*

**b)** Gib eine halbgeordente Menge $(X,R)$ (sprich: $R$ ist eine Halbordnungsrelation, vgl. Vorlesung) an, die keine geordente Menge ist und ein Maximum besitzt.

*Sei* $A$ *eine endliche Menge mit* $|A| \geq 2$ *und* $X = \mathcal{P}(A)$. *Betrachte die Inklusionsrelation* $\subseteq$ *auf* $X$.

**c)** Gib eine halbgeordente Menge $(X,R)$ an, die keine geordente Menge ist und maximale und minimale Elemente, aber weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt.

*Sei* $A$ *eine endliche Menge mit* $|A| \geq 2$ *und* $X = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}$. *Betrachte die Inklusionsrelation* $\subseteq$ *auf* $X$.

## AUFGABE 5.4:

Man zeige: Sei $R$ eine Halbordnungsrelation auf $X$ und sei $U \subseteq X$. Dann existiert (bzgl. $R$) höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum zu $U$ in $X$.

**Bemerkung:** Aus der Eindeutigkeit des Supremums bzw. des Infimums von $U$ (falls diese jeweils existieren) folgt dann unmittelbar auch die Eindeutigkeit des Maximums bzw. des Minimums von $U$ (falls diese jeweils existieren). (vgl. die Bemerkung am Anfang dieses Übungsblattes)

*Seien* $s_1 \in X$ *und* $s_2 \in X$ *Suprema von* $U$. *Aus der Definition des Supremums wissen wir:*

- *Da* $s_1$ *gemäß Voraussetzung Supremum von* $U$ *ist, gilt für alle oberen Schranken* $s$ *von* $U$: $(s_1, s) \in R$. *Insbesondere gilt also auch* $(s_1, s_2) \in R$, *da* $s_2$ *gemäß Voraussetzung Supremum von* $U$ *und somit auch eine obere Schranke von* $U$ *ist.*

- *Da $s_2$ gemäß Voraussetzung Supremum von $U$ ist, gilt für alle oberen Schranken $s$ von $U$: $(s_2, s) \in R$. Insbesondere gilt also auch $(s_2, s_1) \in R$, da $s_1$ gemäß Voraussetzung Supremum von $U$ und somit auch eine obere Schranke von $U$ ist.*

*Es gilt also sowohl $(s_1, s_2) \in R$ als auch $(s_2, s_1) \in R$. Da $R$ als Halbordnungsrelation insbesondere auch antisymmetrisch ist, gilt*

$$((s_1, s_2) \in R \wedge (s_2, s_1) \in R) \rightarrow s_1 = s_2,$$

*sprich: $s_1$ und $s_2$ bezeichnen dasselbe Element, wodurch gezeigt ist, dass das Supremum von $U$ (falls existent) stets eindeutig ist.*

*Der Beweis der Eindeutigkeit des Infimums (falls ein solches existiert) funktioniert analog.*

## <u>AUFGABE 5.5:</u>

Sei $R$ eine Halbordnungsrelation auf $X$ und $\emptyset \neq U \subseteq X$ eine nichtleere, endliche Teilmenge von $X$. Man gebe möglichst kompakte Ausdrücke zur Berechnung des Supremums und des Infimums von $U$ (bzgl. $R$ auf $X$) für folgende Fälle an:

**a)** $X = \mathbb{N}^+$
$R = \{(a, b) \mid a \text{ teilt } b\}$ (Teilbarkeitsrelation, vgl. Vorlesung)

*sup*$(U) = kgV(U)$, *wobei $kgV(U)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Elemente in $U$ bezeichnet*

*inf*$(U) = ggT(U)$, *wobei $ggT(U)$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente in $U$ bezeichnet*

***Anmerkung:*** *Gemäß Definition muss dass Supremum sup$(U)$ von $U$ bzgl. der Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ folgende Eigenschaften erfüllen:*

- *sup$(U) \in \mathbb{N}$;*
- *sup$(U)$ ist eine obere Schranke von $U$, sprich, alle Elemente in $U$ teilen sup$(U)$;*
- *sup$(U)$ teilt alle oberen Schranken von $U$, sprich, sup$(U)$ teilt jedes gemeinsame Vielfache der Elemente in $U$.*

*Dies ist für sup$(U) = kgV(U)$ der Fall. (Betrachte die Primfaktorzerlegung von $kgV(U)$ sowie die Primfaktorzerlegung eines beliebig fixierten gemeinsamen Vielfachen der Elemente in $U$.)*
*Analoge Überlegungen gelten auch für das Infimum inf$(U)$ von $U$ bzgl. der Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ unter Berücksichtigung der allgemeinen Definition des Infimums.*

**b)** $X = \mathcal{P}([n])$ (mit $n \in \mathbb{N}^+$ und $[n] := \{1, \ldots, n\}$)
$R = \{(S, T) \mid S \subseteq T\}$ (Inklusionsrelation, vgl. Vorlesung)

*sup*$(U) = \bigcup_{M \in U} M$

*inf*$(U) = \bigcap_{M \in U} M$

***Anmerkung:*** *Überlege dir auch hier, warum die angegebenen sup$(U)$ und inf$(U)$ tatsächlich sämtliche Eigenschaften aus der Definition des Supremums bzw. Infimums erfüllen.*