Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 19.10.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 4

AUFGABE 4.1:

Es bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $n \in \mathbb{N}^+$ eine positive natürliche Zahl und $[n]$ die Menge $[n] = \{1, 2, ..., n\}$. Stelle fest, ob die folgenden Mengen endlich, unendlich abzählbar (gleichmächtig zu $\mathbb{N}$) oder unendlich überabzählbar (unendlich und nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$) sind. Falls du dich für endlich entscheidest, gib die Kardinalität der Menge als konkrete Zahl an. Begründe deine Antworten.

(a) Die Menge aller injektiven Abbildungen von $[2]$ nach $[3]$.

Es gibt 6 *injektive Abbildungen von* $[2]$ *nach* $[3]$.

(b) Die Menge aller injektiven Abbildungen von $[3]$ nach $[2]$.

Es gibt keine injektiven Abbildungen von $[3]$ *nach* $[2]$.

(c) Die Menge aller surjektiven Abbildungen von $[2]$ nach $[3]$.

Es gibt keine surjektiven Abbildungen von $[2]$ *nach* $[3]$.

(d) Die Menge aller surjektiven Abbildungen von $[3]$ nach $[2]$.

Es gibt 6 *surjektive Abbildungen von* $[3]$ *nach* $[2]$.

AUFGABE 4.2:

a) Sei $A := \{a, b, c, d\}$. Gib jeweils eine Relation $R \subseteq A \times A$ an, die

1. transitiv, aber nicht reflexiv ist.
   Beispiele für R: $\emptyset$, $\{(a, b)\}$, $\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$, $\{(b, b)\}$.
2. eine Äquivalenzrelation ist.
   Wegen Reflexivität muss gelten: $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \subseteq R$.
   Schon $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ *ist eine Äquivalenzrelation.*
   $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c)\}$ *ist keine (nicht symmetrisch).*
   $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a)\}$ *ist eine.*
3. antisymmetrisch, aber nicht transitiv ist.
   Die Transitivität muss verletzt sein, also z. B. $(c, b) \in R$, $(b, d) \in R$, $(c, d) \notin R$.
   Wegen Antisymmetrie darf z. B. nicht $(c, b) \in R$ *und* $(b, c) \in R$ *gelten.*
   Z. B. erfüllt $\{(c, b), (b, d)\}$ *die Bedingungen.*

b) Sei B eine beliebige nichtleere Menge. Betrachte die Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ und die Teilmengen-Relation $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(B)$. Welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation?

- *reflexiv: Ja, es gilt immer* $X \subseteq X$ *für alle* $X \in \mathcal{P}(B)$.

- *symmetrisch: Nein. Aus* $X \subseteq Y$ *folgt nicht* $Y \subseteq X$.
- *antisymmetrisch: Ja, wenn* $X \subseteq Y$ *und* $Y \subseteq X$, *dann gilt* $X = Y$.
- *transitiv: Ja, wenn* $X \subseteq Y$ *und* $Y \subseteq Z$, *dann gilt auch* $X \subseteq Z$.

AUFGABE 4.3:

Untersuche, ob folgende Relationen auf $\mathbb{Z}$ reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv sind:

1. $xRy \Leftrightarrow x \leq 3y$,
   - *reflexiv: Nein, Gegenbeispiel:* $x = -1$.
   - *symmetrisch: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 1$, $y = 4$.
   - *transitiv: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 11$, $y = 4$, $z = 2$.
2. $xSy \Leftrightarrow x - y = 2$,
   - *reflexiv: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 0$. *(S ist sogar irreflexiv.)*
   - *symmetrisch: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 3$, $y = 1$. *(S ist sogar asymmetrisch.)*
   - *transitiv: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 6$, $y = 4$, $z = 2$.
3. $xTy \Leftrightarrow x - y \leq 3$.
   - *reflexiv: Ja,* $\forall x \in \mathbb{Z} : x - x = 0 \leq 3$.
   - *symmetrisch: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 1$, $y = 5$.
   - *transitiv: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$.

AUFGABE 4.4:

Sind folgende Relationen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und/oder transitiv? Welche dieser Relationen sind eine Äquivalenzrelation?

1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq y\}$
   - *reflexiv: Nein, Gegenbeispiel* $x = 1$, $y = 1$.
   - *symmetrisch: Ja, für alle* $x \neq y \in \mathbb{R}$ *gilt* $(x, y), (y, x) \in R_1$.
   - *antisymmetrisch: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 1$, $y = 2$.
   - *transitiv: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.
   - *Äquivalenzrelation: Nein.*
2. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid x \text{ teilt } y\}$
   - *reflexiv: Ja, denn jedes* $x \in \mathbb{N}$ *teilt sich selbst.*
   - *symmetrisch: Nein, Gegenbeispiel:* $x = 2$, $y = 4$.
   - *antisymmetrisch: Ja, ist* x *ein Teiler von* y *und* y *ein Teiler von* x, *so gilt* $x = y$.
   - *transitiv: Ja, ist* x *Teiler von* y *und* y *Teiler von* z, *so ist* x *auch Teiler von* z.
   - *Äquivalenzrelation: Nein.*

3. $R_3 = \{(x, y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid x \subseteq y\}$

   - *reflexiv: Ja, denn für jede Menge x gilt $x \subseteq x$.*
   - *symmetrisch: Nein, Gegenbeispiel: $x = \{1\}$, $y = \{1, 2\}$.*
   - *antisymmetrisch: Ja, gilt $x \subseteq y$ und $y \subseteq x$, so gilt $x = y$.*
   - *transitiv: Ja, ist $x \subseteq y$ und $y \subseteq z$, so gilt $x \subseteq z$.*
   - *Äquivalenzrelation: Nein.*

4. $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$

   - *reflexiv: Ja, denn $(0, 0) \in R_4$ und $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \ x \cdot x > 0$.*
   - *symmetrisch: Ja, denn aus $x \cdot y > 0$ folgt $y \cdot x > 0$.*
   - *antisymmetrisch: Nein, Gegenbeispiel $(1, 2)$ und $(2, 1)$.*
   - *transitiv: Ja, seien $(x, y), (y, z) \in R_4$.*
     - ***1. Fall:*** *$x = y = z = 0$. So gilt $(x, z) \in R_4$.*
     - ***2. Fall:*** *$x > 0$: Es folgt, dass $y > 0$ und somit $z > 0$. Somit ist $(x, z) \in R_4$.*
     - ***3. Fall:*** *$x < 0$: Es folgt, dass $y < 0$ und somit $z < 0$. Somit ist $(x, z) \in R_4$.*
   - *Äquivalenzrelation: Ja.*