Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 12.10.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 3

AUFGABE 3.1:

Es seien A, B nichtleere Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Beweise:

a) Die Umkehrrelation f^{-1} einer Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann eine Abbildung, wenn f bijektiv ist.

b) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ einer bijektiven Abbildung $f : A \to B$ ist ebenfalls bijektiv.

AUFGABE 3.2:

Es seien M und N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Beweise oder widerlege:

a) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ für alle $X, Y \subseteq M$.

b) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ für alle $U, V \subseteq N$.

Hinweis: Für alle nichtleeren Mengen A, B, Abbildungen $g : A \longrightarrow B$ und Teilmengen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ sind die Mengen $g(A') \subseteq B$ und $g^{-1}(B') \subseteq A$ definiert als

$$g(A') = \{g(a') \mid a' \in A'\}$$

und

$$g^{-1}(B') = \{a' \mid g(a') \in B'\}.$$

AUFGABE 3.3:

Im Folgenden ist die Abzählbarkeit verschiedener Mengen zu zeigen, indem jeweils eine Bijektion von der entsprechenden Menge nach $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}^+$ angegeben wird. (Bemerkung: Offenbar existiert mit $\tilde{f} : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$, $\tilde{f}(x) := x - 1$, eine Bijektion von $\mathbb{N}^+$ nach $\mathbb{N}$.)

a) Seien A, B abzählbar mit $A \cap B = \emptyset$.
<u>Zeige:</u> A ∪ B ist abzählbar.

b) Sei Σ ein endliches Alphabet.
<u>Zeige:</u> Σ^* ist abzählbar.

AUFGABE 3.4:

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Man definiere eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{P}([n]) \to \{0,1\}^n$ zwischen $\mathcal{P}([n])$ und $\{0,1\}^n$. Dabei bezeichnet $[n]$ die Menge $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^+$ und $\mathcal{P}([n])$ deren Potenzmenge.

AUFGABE 3.5:

Es bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^+$ eine positive natürliche Zahl und $[n]$ die Menge $[n] = \{1, 2, ..., n\}$. Stelle fest, ob die folgenden Mengen endlich, unendlich abzählbar (gleichmächtig zu $\mathbb{N}$) oder unendlich überabzählbar (unendlich und <u>nicht</u> gleichmächtig zu $\mathbb{N}$) sind. Falls du dich für endlich entscheidest, gib die Kardinalität der Menge als konkrete Zahl an. Begründe deine Antworten.

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(b) Die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$.

(c) Die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $[n]$.

(d) Die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $\mathbb{N}$.

(e) Die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

(f) Die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.