Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 12.10.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 3

AUFGABE 3.1:

Es seien A, B nichtleere Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Beweise:

a) Die Umkehrrelation f^{-1} einer Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann eine Abbildung, wenn f bijektiv ist.

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Es gilt:

$f^{-1} : B \to A$ ist eine Abbildung.

$\Leftrightarrow$ Zu jedem $b \in B$ exisitiert genau ein $a \in A$ mit $(b, a) \in f^{-1}$.

$\Leftrightarrow$ Zu jedem $b \in B$ exisitiert genau ein $a \in A$ mit $(a, b) \in f$.

$\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

b) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ einer bijektiven Abbildung $f : A \to B$ ist ebenfalls bijektiv.

Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Wir wissen aus Aufgabenteil a), dass $f^{-1} : B \to A$ eine Abbildung ist.

Da $f : A \to B$ eine Abbildung ist, exisitiert zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$. Das heißt, zu jedem $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $(b, a) \in f^{-1}$. Somit ist f^{-1} bijektiv.

AUFGABE 3.2:

Es seien M und N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Beweise oder widerlege:

a) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ für alle $X, Y \subseteq M$.

Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel:
$M := \{1, 2, 3\}$, $N := \{4, 5\}$, $f := \{(1, 4), (2, 5), (3, 4)\}$, $X := \{1, 2\}$, $Y := \{2, 3\}$;
$f(X \cap Y) = f(\{2\}) = \{5\}$,
$f(X) \cap f(Y) = \{4, 5\} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\}$.

b) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ für alle $U, V \subseteq N$.

Die Aussage ist wahr.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U \cup V) &= \{x \in M \mid f(x) \in (U \cup V)\} \\
&= \{x \in M \mid f(x) \in U \vee f(x) \in V\} \\
&= \{x \in M \mid f(x) \in U\} \cup \{x \in M \mid f(x) \in V\} \\
&= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)
\end{aligned}$$

AUFGABE 3.3:

Im Folgenden ist die Abzählbarkeit verschiedener Mengen zu zeigen, indem jeweils eine Bijektion von der entsprechenden Menge nach $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}^+$ angegeben wird. (Bemerkung: Offenbar existiert mit $\tilde{f} : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$, $\tilde{f}(x) := x - 1$, eine Bijektion von $\mathbb{N}^+$ nach $\mathbb{N}$.)

a) Seien A, B abzählbar mit $A \cap B = \emptyset$.
Zeige: $A \cup B$ ist abzählbar.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}^{gerade}$ die Menge aller geraden natürlichen Zahlen und mit $\mathbb{N}^{ungerade}$ die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.

- *A abzählbar $\Rightarrow \exists f$ mit $f : A \to \mathbb{N}$ und f bijektiv.*
  $\Rightarrow f' : A \to \mathbb{N}^{gerade}$ mit $f'(x) := 2 \cdot f(x)$ ist ebenfalls bijektiv.
- *B abzählbar $\Rightarrow \exists g$ mit $g : B \to \mathbb{N}$ und g bijektiv.*
  $\Rightarrow g' : B \to \mathbb{N}^{ungerade}$ mit $g'(x) := 2 \cdot g(x) + 1$ ist ebenfalls bijektiv.

Offenbar ist

$$h : A \cup B \to \mathbb{N}^{gerade} \cup \mathbb{N}^{ungerade} \, (= \mathbb{N})$$

mit

$$h(x) := \begin{cases} f'(x) & \text{falls } x \in A \\ g'(x) & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

für $A \cap B = \emptyset$ auch eine (wohldefinierte) bijektive Abbildung und $A \cup B$ somit abzählbar.

b) Sei Σ ein endliches Alphabet.
Zeige: Σ^* ist abzählbar.

Die gesuchte Bijektion von Σ^* nach $\mathbb{N}$ ist die Umkehrfunktion der sogenannten Standardnummerierung.
Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, d. h., wir ordnen die n Elemente von Σ beliebig, aber fix den Zahlen von 1 bis n zu.
Die Umkehrfunktion $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ der Standardnummerierung ist nun gegeben durch $\sigma(\epsilon) = 0$ und

$$\sigma\left(a_{i_k} a_{i_{k-1}} \ldots a_{i_1} a_{i_0}\right) = i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + \ldots + i_1 n + i_0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Offenbar handelt es sich bei σ um eine wohldefinierte, bijektive Abbildung von Σ^* nach $\mathbb{N}$.

Hinweis: *Mache dir bei den angegebenen bijektiven Abbildungen in dieser Aufgabe jeweils klar, warum diese tatsächlich wohldefiniert und sowohl injektiv als auch surjektiv sind! (vgl. auch die entsprechenden Erläuterungen in den Tutorien)*

AUFGABE 3.4:

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Man definiere eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{P}([n]) \to \{0,1\}^n$ zwischen $\mathcal{P}([n])$ und $\{0,1\}^n$. Dabei bezeichnet $[n]$ die Menge $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^+$ und $\mathcal{P}([n])$ deren Potenzmenge.

Wir definieren

$$f(X) := (y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n \quad \textit{mit} \quad y_i = 1 \Leftrightarrow i \in X, \; i = 1, \ldots, n,$$

für $X \subseteq [n]$.

Offenbar handelt es sich bei f um eine wohldefinierte Abbildung, da jedem Element X der Potenzmenge $\mathcal{P}([n])$ genau ein n-Tupel aus $\{0,1\}^n$ zugeordnet wird.
Es bleibt zu zeigen, dass f tatsächlich bijektiv ist.

Injektivität:
Seien $X, X' \subseteq [n]$ und sei entsprechend $f(X) = (y_1, \dots, y_n)$ sowie $f(X') = (y'_1, \dots, y'_n)$. Es gilt

$$\begin{aligned}(f(X) = f(X')) \Leftrightarrow ((y_1, \dots, y_n) = (y'_1, \dots, y'_n)) &\Leftrightarrow (\forall i \in [n] : (y_i = 1 \Leftrightarrow y'_i = 1)) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in [n] : (i \in X \Leftrightarrow i \in X')) \\ &\Leftrightarrow (X = X').\end{aligned}$$

Surjektivität:
Gegeben sei ein beliebiges n-Tupel $y = (y_1, \dots, y_n) \in \{0,1\}^n$.
Offenbar gilt für $X := \{i \in [n] \mid y_i = 1\} \subseteq [n]$, dass $f(X) = y$.

AUFGABE 3.5:
Es bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^+$ eine positive natürliche Zahl und $[n]$ die Menge $[n] = \{1, 2, ..., n\}$. Stelle fest, ob die folgenden Mengen endlich, unendlich abzählbar (gleichmächtig zu $\mathbb{N}$) oder unendlich überabzählbar (unendlich und nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$) sind. Falls du dich für endlich entscheidest, gib die Kardinalität der Menge als konkrete Zahl an. Begründe deine Antworten.

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Es exisitiert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und allen endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Sei X eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Wir bilden diese Teilmenge ab auf die Zahl $\sum_{x \in X} 2^x$. Daher ist die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar.

(b) Die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$.

Die Menge $[n]$ ist endlich und somit auch die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$.

(c) Die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $[n]$.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar. Wir konstruieren eine Bijektion von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zu der Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\{1,2\}$: Sei $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. X wird auf die Abbildung f abgebildet, für welche gilt $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in X$. Daraus folgt, dass die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $[n]$ überabzählbar ist.

(d) Die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $\mathbb{N}$.

Wir können für alle $m \in \mathbb{N}$ nacheinander die (endlichen) Mengen aller Abbildungen von $[n]$ nach $[m]$ aufzählen. Daher ist die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $\mathbb{N}$ abzählbar.

Alternativ können wir die Menge $\mathbb{N}^n$ betrachten. Für jedes n-Tupel $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{N}^n$ definieren wir eine Abbildung von $[n]$ nach $\mathbb{N}$ durch $f(i) = y_i$. Somit ist beweisen, dass die beiden Mengen gleichmächtig sind und damit die Menge aller Abbildungen von $[n]$ nach $\mathbb{N}$ abzählbar.

(e) Die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Die Überabzählbarkeit folgt direkt aus (c).

(f) Die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *ist überabzählbar, somit kann es keine bijektiven Abbildungen von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *geben.*