Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 05.10.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 2

AUFGABE 2.1:

Beweise: Für alle natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}^+$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < k \leq n$ gilt:

$$\frac{n}{k} \leq \frac{n-a}{k-a} \; .$$

AUFGABE 2.2:

Beweise oder widerlege: Zwei Mengen $A, B \subseteq \mathcal{U}$ über einem Universum $\mathcal{U}$ sind genau dann identisch, wenn ihre Potenzmengen identisch sind, sprich:

$$A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \; .$$

Zur Erinnerung: $\mathcal{P}(A) := \{C \mid C \subseteq A\}$.

AUFGABE 2.3:

Beweise die folgenden Aussagen:

a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

b) $4^1 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^n = \prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)}$

AUFGABE 2.4:

Die Summe der Kehrwerte der ersten n natürlichen Zahlen (ohne Null) bezeichnet man als n-te harmonische Zahl H_n, also $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
Beweise (mittels vollständiger Induktion) oder widerlege:

a) $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_{n+1} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

b) $H_{2^n} < n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

AUFGABE 2.5:

In dieser Aufgabe betrachten wir die n-te Partialsumme der geometrischen Reihe

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^n$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, q \in \mathbb{R}$.

Behauptung: Ist $q \neq 1$, so gilt $s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Beweise die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

b) Beweise die Behauptung *direkt* (ohne explizite Benutzung vollständiger Induktion).