Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 05.10.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 2

AUFGABE 2.1:

Beweise: Für alle natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}^+$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < k \leq n$ gilt:

$$\frac{n}{k} \leq \frac{n-a}{k-a} \; .$$

Durch Umformung lässt sich der Zusammenhang erkennen:

$$\begin{aligned} k &\leq n \\ \Rightarrow ka &\leq na \\ \Rightarrow ka - nk &\leq na - nk \\ \Rightarrow nk - ka &\geq nk - na \\ \Rightarrow k(n-a) &\geq n(k-a) \\ \Rightarrow \frac{n}{k} &\leq \frac{n-a}{k-a} \end{aligned}$$

AUFGABE 2.2:

Beweise oder widerlege: Zwei Mengen $A, B \subseteq \mathcal{U}$ über einem Universum $\mathcal{U}$ sind genau dann identisch, wenn ihre Potenzmengen identisch sind, sprich:

$$A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \; .$$

Zur Erinnerung: $\mathcal{P}(A) := \{C \mid C \subseteq A\}$.

Die Behauptung ist korrekt. Beweis:

$$\begin{aligned} A = B \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} : (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall C \subseteq \mathcal{U} : ((\forall x \in C : x \in A) \Leftrightarrow (\forall x \in C : x \in B)) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall C \subseteq \mathcal{U} : (C \subseteq A \Leftrightarrow C \subseteq B) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall C \subseteq \mathcal{U} : (C \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

AUFGABE 2.3:

Beweise die folgenden Aussagen:

a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

Induktionsanfang (IA) $(n = 1)$**:** $1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1^2$.

Induktionsschritt (IS) $(n \rightsquigarrow n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2\,(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Die zweite Behauptung folgt mithilfe der Gaußschen Summenformel (vgl. Vorlesung):

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+2+\ldots+n)^2$$

b) $4^1 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^n = \prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)}$

Induktionsanfang (IA) $(n = 1)$: $4^1 = 4 = 2^{1 \cdot 2}$.

Induktionsschritt (IS) $(n \rightsquigarrow n+1)$:

$$\prod_{k=1}^{n+1} 4^k = \prod_{k=1}^{n} 4^k \cdot 4^{n+1} = 2^{n(n+1)} \cdot 2^{2(n+1)} = 2^{n^2+n} \cdot 2^{2n+2} = 2^{n^2+3n+2} = 2^{(n+1)(n+2)}$$

AUFGABE 2.4:

Die Summe der Kehrwerte der ersten n natürlichen Zahlen (ohne Null) bezeichnet man als n-te harmonische Zahl H_n, also $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Beweise (mittels vollständiger Induktion) oder widerlege:

a) $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_{n+1} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Die Behauptung ist falsch. Betrachte z. B. den Fall $n = 1$:
$\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1 = 1 \neq 2 = 2(1 + \frac{1}{2}) - 1 = (1+1)H_2 - 1$

b) $H_{2^n} < n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Die Behauptung ist wahr. Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang (IA) $(n = 1)$: $H_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} < 2 = 1 + 1$

Induktionsvoraussetzung (IV): *Die Behauptung gelte für ein beliebiges (aber fixiertes) $n \in \mathbb{N}$.*

Induktionsschritt (IS) $(n \rightsquigarrow n+1)$**:**

$$\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i+2^n} \\
&< \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + 1 \\
&= H_{2^n} + 1 \\
&\overset{\text{(IV)}}{<} (n+1)+1
\end{aligned}$$

AUFGABE 2.5:

In dieser Aufgabe betrachten wir die n-te Partialsumme der geometrischen Reihe

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^n$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, q \in \mathbb{R}$.

Behauptung: Ist $q \neq 1$, so gilt $s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Beweise die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

(IA) $(n=0)$**:** $s_0 = \sum_{i=0}^{0} a_0 q^i = a_0 = a_0 \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$

(IV): *Die Behauptung gelte für ein beliebiges (aber fixiertes) $n \in \mathbb{N}$.*

(IS) $(n \rightsquigarrow n+1)$**:** $s_{n+1} = s_n + a_0 q^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + a_0 q^{n+1} = a_0 \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

b) Beweise die Behauptung *direkt* (ohne explizite Benutzung vollständiger Induktion).

Wir beobachten: $qs_n = a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \cdots + a_0 q^{n+1}$, *also* $s_n - qs_n = a_0 - a_0 q^{n+1}$ *bzw.* $s_n (1-q) = a_0 (1 - q^{n+1})$, *woraus die zu zeigende Aussage direkt folgt.*