Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 28.09.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Übungsblatt 1

Sei $m \geq 1$ und seien $F_1, \dots, F_m$ und G aussagenlogische Formeln über der Menge von aussagenlogische Variablen $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$.

- Die Menge $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ heißt widersprüchlich, falls die Konjunktion aller F_i widersprüchlich ist, das heißt, die Formel $\bigwedge_{i=1}^{m} F_i = F_1 \wedge \cdots \wedge F_m$ ist äquivalent zu 0.
- Eine Formelmenge $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ heißt erfüllbar, falls sie nicht widersprüchlich ist, das heißt, es existiert (mindestens) eine Belegung b der Variablen $X_i \in \mathcal{X}$, sodass $F_1(b) = \cdots = F_m(b) = 1$.
- Wir sagen, dass eine Aussage G aus einer Formelmenge $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ folgt, falls die Formel $\bigwedge_{i=1}^{m} F_i \to G$ eine Tautologie ist. Das heißt, für alle Belegungen b von $\mathcal{X}$ gilt, dass $G(b) = 1$ aus $F_1(b) = \cdots = F_m(b) = 1$ folgt.

<u>AUFGABE 1.1:</u>

Man gebe eine dreielementige Menge M von aussagenlogischen Formeln über den beiden Aussagevariablen X_1, X_2 an, so dass jede zweielementige Teilmenge von M erfüllbar ist, M selbst jedoch nicht. Dabei nennen wir eine Menge aussagenlogischer Formeln erfüllbar, wenn eine Belegung der Aussagevariablen existiert, für die alle Formeln der Menge den Wert „wahr“ ergeben.

Hinweis: Ein Beispiel für eine zweielementige Menge M' von aussagenlogischen Formeln über einer einzigen Aussagevariablen X_1, so dass jede einelementige Teilmenge von M' erfüllbar ist, M' selbst jedoch nicht, wäre $M' = \{X_1, \neg X_1\}$.

<u>AUFGABE 1.2:</u>

Man gebe für die folgende aussagenlogische Formel eine Wahrheitstabelle an:

$$((A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \oplus C.$$

<u>AUFGABE 1.3:</u>

Wir betrachten in dieser Aufgabe aussagenlogische Formeln $F_1, \dots, F_m$ und G über den Aussagevariablen $X_1, \dots, X_n$. **Zeige:** Die aussagenlogische Formel G ist genau dann eine Folgerung aus der aussagenlogischen Formelmenge $\{F_1, \dots, F_m\}$, wenn $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m \wedge (\neg G)$ widersprüchlich ist.[1]

[1] Seien A und B Aussagen. Um „A ist wahr, *genau dann wenn* B wahr ist.“ (kurz: $A \leftrightarrow B$ bzw. $A \Leftrightarrow B$) zu zeigen, müssen beide Richtung (sprich: $A \to B$ <u>und</u> $B \to A$) bewiesen werden.

AUFGABE 1.4:

Es bezeichne $P = P(x, y)$ ein zweistelliges Prädikat und

$$H = \forall x\,(\exists y\,(P(x, y)))$$

und

$$H' = \exists x\,(\forall y\,(P(x, y)))$$

zwei durch P definierte Aussagen.

Man gebe ein konkretes Prädikat P über einer konkreten Grundmenge M an, so dass die entsprechenden Aussagen H und H' unterschiedliche Wahrheitswerte haben.