Matthias Hamann
Alexander Moch

Mannheim, den 28.09.2020

CS 301 Formale Grundlagen der Informatik, Herbstsemester 2020

Lösungsskizze zum Übungsblatt 1

Sei $m \geq 1$ und seien $F_1, \ldots, F_m$ und G aussagenlogische Formeln über der Menge von aussagenlogische Variablen $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$.

- Die Menge $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ heißt widersprüchlich, falls die Konjunktion aller F_i widersprüchlich ist, das heißt, die Formel $\bigwedge_{i=1}^{m} F_i = F_1 \wedge \cdots \wedge F_m$ ist äquivalent zu 0.
- Eine Formelmenge $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ heißt erfüllbar, falls sie nicht widersprüchlich ist, das heißt, es existiert (mindestens) eine Belegung b der Variablen $X_i \in \mathcal{X}$, sodass $F_1(b) = \cdots = F_m(b) = 1$.
- Wir sagen, dass eine Aussage G aus einer Formelmenge $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ folgt, falls die Formel $\bigwedge_{i=1}^{m} F_i \to G$ eine Tautologie ist. Das heißt, für alle Belegungen b von $\mathcal{X}$ gilt, dass $G(b) = 1$ aus $F_1(b) = \cdots = F_m(b) = 1$ folgt.

AUFGABE 1.1:

Man gebe eine dreielementige Menge M von aussagenlogischen Formeln über den beiden Aussagevariablen X_1, X_2 an, so dass jede zweielementige Teilmenge von M erfüllbar ist, M selbst jedoch nicht. Dabei nennen wir eine Menge aussagenlogischer Formeln erfüllbar, wenn eine Belegung der Aussagevariablen existiert, für die alle Formeln der Menge den Wert „wahr“ ergeben.

Hinweis: Ein Beispiel für eine zweielementige Menge M' von aussagenlogischen Formeln über einer einzigen Aussagevariablen X_1, so dass jede einelementige Teilmenge von M' erfüllbar ist, M' selbst jedoch nicht, wäre $M' = \{X_1, \neg X_1\}$.

Sei $M = \{F_1, F_2, F_3\}$. Es soll gelten, dass $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \wedge F_3$ und $F_2 \wedge F_3$ erfüllbar sind, $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$ jedoch nicht. Dies ist zum Beispiel der Fall für

$$F_1 = X_1,$$

$$F_2 = X_2,$$

$$F_3 = \neg\left(X_1 \wedge X_2\right),$$

also

$$M = \{X_1, X_2, \neg\left(X_1 \wedge X_2\right)\}.$$

AUFGABE 1.2:

Man gebe für die folgende aussagenlogische Formel eine Wahrheitstabelle an:

$$((A \vee B) \wedge \neg\left(A \wedge B\right) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \oplus C.$$

Mithilfe der De Morganschen Gesetze erkennen wir, dass $\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A \vee \neg B)$ identisch sind. Weiterhin lässt sich erkennen, dass $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ identisch ist zu $A \oplus B$. Somit ist die ganze Formel identisch zu $A \oplus B \oplus C$.

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

AUFGABE 1.3:

Wir betrachten in dieser Aufgabe aussagenlogische Formeln $F_1, \ldots, F_m$ und G über den Aussagevariablen $X_1, \ldots, X_n$. **Zeige:** Die aussagenlogische Formel G ist genau dann eine Folgerung aus der aussagenlogischen Formelmenge $\{F_1, \ldots, F_m\}$, wenn $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m \wedge (\neg G)$ widersprüchlich ist.[1]

Sei B_n die Menge aller Belegungen der Variablen $X_1, \ldots, X_n$.

$$\begin{aligned}
& F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m \wedge (\neg G) \;\; \textit{ist widersprüchlich.} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall b \in B_n \;\textit{gilt:}\; (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m \wedge (\neg G))\,(b) = 0. \\
\Leftrightarrow \quad & \forall b \in B_n \;\textit{gilt: Wenn}\; (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m)\,(b) = 1 \;\textit{ist,} \\
& \textit{so muss}\; (\neg G)\,(b) = 0, \;\textit{also}\; G\,(b) = 1, \;\textit{sein.} \\
\Leftrightarrow \quad & G \;\textit{folgt aus}\; \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

AUFGABE 1.4:

Es bezeichne $P = P(x, y)$ ein zweistelliges Prädikat und

$$H = \forall x\,(\exists y\,(P(x, y)))$$

und

$$H' = \exists x\,(\forall y\,(P(x, y)))$$

zwei durch P definierte Aussagen.
Man gebe ein konkretes Prädikat P über einer konkreten Grundmenge M an, so dass die entsprechenden Aussagen H und H' unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

Betrachte beispielsweise das zweistellige Prädikat $x = y$ über der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Dann ist

$$\forall x\,(\exists y\,(x = y))$$

wahr (wähle für beliebig fixiertes x jeweils $y := x$), aber

$$\exists x\,(\forall y\,(x = y))$$

ist offensichtlich falsch.

[1] Seien A und B Aussagen. Um „A ist wahr, *genau dann wenn* B wahr ist.“ (kurz: $A \leftrightarrow B$ bzw. $A \Leftrightarrow B$) zu zeigen, müssen beide Richtung (sprich: $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$) bewiesen werden.