Formale Grundlagen der Informatik

Herbstsemester 2020

Prof. Dr. Matthias Krause
Dr. Matthias Hamann

Graphen

(Stand: Oktober 2020)

Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Universität Mannheim

Graphen

Definition Gerichtete Graphen

Graphen sind ein für die Informatik sehr wichtiges Instrument zur Veranschaulichung und Formalisierung von Systemen und Sachverhalten verschiedenster Art. (Bsp.: Netzwerke, 'Social Media'-Graphen, ...)

Man unterscheidet gerichtete und ungerichtete Graphen.

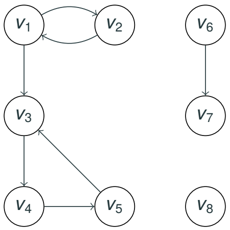
Definition 9.1

- Gerichtete Graphen $G = (V, E)$ sind definiert durch eine endliche nichtleere Menge V von Knoten und eine Menge $E \subseteq V \times V$ gerichteter Kanten über V.
- Für Kanten $e = (v, w)$ bezeichnet v den Startknoten und w den Zielknoten von e.
- Für Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V, E')$ heißt G' **Untergraph von** G, falls $E' \subseteq E$.

Gerichtete Graphen - Beispiel

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_7)\}$.



Ein Untergraph von G wäre bspw. $G' = (V, E')$ mit $E' = \{(v_1, v_2), (v_4, v_5), (v_6, v_7)\} \subseteq E$.

Ingrad und Ausgrad von Knoten

Definition 9.2

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

- Der **Ausgrad** eines Knotens $v \in V$ in G bezeichnet die Anzahl der in v startenden Kanten, also

$$outdeg_G(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|.$$

- Der **Ingrad** eines Knotens $v \in V$ in G bezeichnet die Anzahl der in v endenden Kanten, also

$$indeg_G(v) = |\{w \in V \mid (w, v) \in E\}|.$$

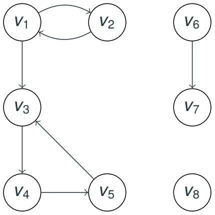
Man beachte die Relation

$$|E| = \sum_{v \in V} indeg_G(v) = \sum_{v \in V} outdeg_G(v).$$

Ingrad und Ausgrad von Knoten - Beispiel

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_7)\}$.



Es gilt bspw.:

- $outdeg_G(v_1) = 2$, $indeg_G(v_1) = 1$
- $outdeg_G(v_6) = 1$, $indeg_G(v_6) = 0$

Definition 9.3

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

- Eine Folge von $s \geq 1$ aufeinanderfolgender Kanten

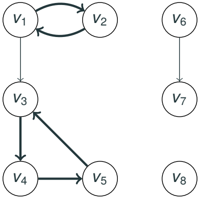
  $$p = ((v_1, v_2), (v_2, v_3), \cdots, (v_s, v_{s+1}))$$

  aus E heißt **Weg bzw. Pfad** der Länge s von v_1 nach v_{s+1} in G.
- Ein Weg p heißt **Kreis**, falls $v_1 = v_{s+1}$ und $s \geq 2$.
- Ein Weg p heißt **einfach**, falls $v_1, \ldots, v_{s+1}$ alle untereinander verschieden sind. Ein Kreis p heißt **einfach**, falls $v_1, \ldots, v_s$ alle untereinander verschieden sind.
- $w \in V$ heißt **erreichbar von** $v \in V$ **aus in** G, falls $v = w$ oder ein Weg in G von v nach w existiert. (Schreibweise: $v \xrightarrow[G]{*} w$)

Wege und Kreise, Erreichbarkeit - Beispiel

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_7)\}$.



Es gilt bspw.:

- Einfacher Weg der Länge 2 von v_3 nach v_5: $((v_3, v_4), (v_4, v_5))$.
- Einfache Kreise in G: $((v_1, v_2), (v_2, v_1))$, $((v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3))$.
- v_5 ist von v_1 aus erreichbar, sprich: $v_1 \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} v_5$.

Starker Zusammenhang in gerichteten Graphen

Definition 9.4

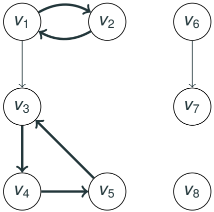
Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

- Zwei Knoten $v, w \in V$ heißen **stark zusammenhängend** (Schreibweise: $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$), falls sowohl $v \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} w$ als auch $w \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} v$, d. h., falls $v = w$ oder falls v und w auf einem Kreis in G liegen.
- Die Relation $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$ ist eine Äquivalenzrelation auf V. (Beweis einfache Übungsaufgabe)
- Die Äquivalenzklassen von $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$ heißen die **starken Zusammenhangskomponenten** von G.

Starker Zusammenhang in gerichteten Graphen - Bsp.

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_6, v_7)\}$.



Starke Zusammenhangskomponenten von G:
$\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$, $\{v_6\}$, $\{v_7\}$, $\{v_8\}$.

Definition 9.5

- Eine Zweiermenge $\{v, w\} \subseteq V$ heißt **ungerichtete Kante** über der Knotenmenge V.
- Ungerichtete Graphen $G = (V, E)$ sind definiert durch eine endliche Menge V von Knoten und eine Menge E von ungerichteten Kanten über V.
- Der Grad $deg_G(v)$ eines Knotens $v \in V$ in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Kanten in E, die v enthalten.

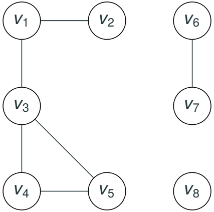
Beobachtung: Für ungerichtete Graphen gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} deg_G(v).$$

Ungerichtete Graphen - Beispiel

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.



Es gilt:

- $deg_G(v_1) = 2$, $deg_G(v_2) = 1$, $deg_G(v_3) = 3$, $deg_G(v_4) = 2$, $deg_G(v_5) = 2$, $deg_G(v_6) = 1$, $deg_G(v_7) = 1$, $deg_G(v_8) = 0$.
- $2 \cdot |E| = 2 \cdot 6 = 12 = 2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 0 = \sum_{v \in V} deg_G(v)$.

Definition 9.6

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Eine Folge von $s \geq 1$ aufeinanderfolgender Kanten

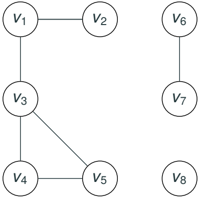
  $$p = (\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_s, v_{s+1}\})$$

  aus E heißt **Weg** der Länge s von v_1 nach v_{s+1} in G.
- Ein Weg p heißt **Kreis**, falls $s \geq 3$ und $v_1 = v_{s+1}$ und alle Kanten in p untereinander verschieden sind.
- Ein Weg p heißt **einfach**, falls $v_1, \ldots, v_{s+1}$ alle untereinander verschieden sind. Ein Kreis p heißt **einfach**, falls $v_1, \ldots, v_s$ alle untereinander verschieden sind.

Wege und Kreise - Beispiel

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.



Es gilt bspw.:

- Einfacher Weg der Länge 3 von v_2 nach v_5: $(\{v_2, v_1\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_5\})$.
- Einfacher Kreis in G: $(\{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_3\})$.

Zusammenhang in ungerichteten Graphen

Definition 9.7

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

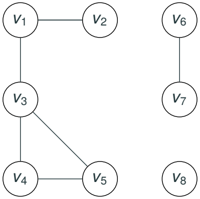
- Zwei Knoten $v, w \in V$ heißen **zusammenhängend in** G, falls $v = w$ oder falls ein Weg in G von v nach w existiert (was gleichbedeutend dazu ist, dass ein Weg von w nach v existiert). Schreibweise: $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$.
- Die Zusammenhangsrelation $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$ ist eine Äquivalenzrelation auf V. (Beweis einfache Übungsaufgabe)
- Die Äquivalenzklassen von $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$ heißen die **Zusammenhangskomponenten von** G.

Beobachtung: Zwischen verschiedenen Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen existieren keine Kanten.

Zusammenhang in ungerichteten Graphen - Beispiel

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.



Zusammenhangskomponenten von G:
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_8\}$.

Definition 9.8

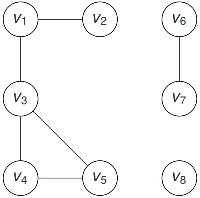
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- G heißt **zusammenhängend**, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$ (sprich: falls G genau eine Zusammenhangskomponente hat).
- G heißt **kreisfrei**, falls G keine Kreise als Untergraphen enthält.
- G heißt **Baum**, falls G kreisfrei und zusammenhängend ist.
- G heißt **Wald**, falls G kreisfrei ist, d. h., falls alle Zusammenhangskomponenten von G Bäume sind.
- G heißt **vollständig**, falls E alle $\binom{|V|}{2}$ möglichen Kanten enthält.

Bäume und Wälder - Beispiel 1

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.

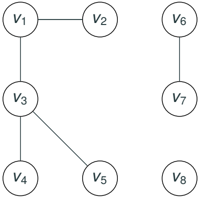


G ist weder ein Baum, noch ein Wald.

Bäume und Wälder - Beispiel 2

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.

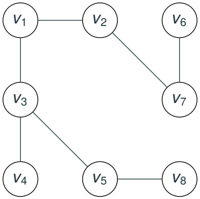


G ist ein Wald, aber kein Baum.

Bäume und Wälder - Beispiel 3

$G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_7\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_8\}, \{v_3, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.



G ist ein Baum (und ein Wald).

Struktursatz Bäume

Theorem 9.9

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. G ist genau dann ein Baum, wenn mindestens zwei der folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) *G kreisfrei,*

(2) *G zusammenhängend,*

(3) $|E| = |V| - 1$.

Der Beweis dieses Theorems ergibt sich aus den folgenden Lemmata.

Beweis Struktursatz (Theorem 9.9) - Lemma 9.10

Lemma 9.10

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
Aus $|E| \geq |V|$ folgt G nicht kreisfrei.

Beweis per Induktion über $|V|$:

- **Induktionsanfang:** $|V| = 3$ ist einfach (siehe Tafel).
- **Induktionsschritt:** Fixieren beliebiges $n \geq 3$, sodass $|V| = n + 1$ und $|E| \geq n + 1$, und setzen voraus, dass Lemma 9.10 für alle ungerichteten Graphen mit höchstens n Knoten gilt.
  - **Fall 1:** $\exists v \in V : deg_G(v) = 0$. Dann enthält $\tilde{G} = (V \setminus \{v\}, E)$ (und damit auch G) einen Kreis (Ind.V.).
  - **Fall 2:** $\exists v \in V : deg_G(v) = 1$. Sei e die entsprechende Kante mit $v \in e$. Dann enthält $\tilde{G} = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\})$ (und damit auch G) einen Kreis (Ind.V.).

- **Fall 3:** $\forall v \in V : deg_G(v) \geq 2$. Wir fixieren beliebiges $v \in V$ und konstruieren eine in v startende Kantenfolge, die einen Kreis bildet nach folgendem Prinzip. Sobald unsere Folge einen neuen Knoten v' erreicht hat, wählen wir eine in v' startende noch nicht besuchte Kante. Diese muss existieren, da $deg_G(v') \geq 2$. Führt diese zu einem bereits besuchten Knoten, so erhalten wir einen Kreis. Falls nicht, fahren wir mit dem Zielknoten dieser Kante fort. Dieser Prozess muss mit Konstruktion eines Kreises abbrechen, da $|V|$ endlich. $\square$

Lemma 9.11

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
Aus $|E| \leq |V| - 2$ folgt G nicht zusammenhängend.

Beweis per Induktion über $|V|$:

- **Induktionsanfang:** $|V| = 3$ ist einfach (siehe Tafel).
- **Induktionsschritt:** Fixieren beliebiges $n \geq 3$, sodass $|V| = n + 1$ und $|E| \leq (n + 1) - 2$, und setzen voraus, dass Lemma 9.11 für alle ungerichteten Graphen mit höchstens n Knoten gilt. Beobachtung: $\exists v \in V : deg_G(v) \leq 1$. (da $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} deg_G(v)$, Folie 9)
  - **Fall 1:** $\exists v \in V : deg_G(v) = 0$. Dann ist G nicht zusammenhängend.
  - **Fall 2:** $\exists v \in V : deg_G(v) = 1$. Sei e die entsprechende Kante mit $v \in e$. Dann ist $\tilde{G} = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\})$ (und damit auch G) nicht zusammenhängend (Ind.V.).

Lemma 9.12

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
Aus G zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$ folgt G kreisfrei.

Beweis: Es sei G zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen, G enthält einen Kreis K. Es sei $e = \{u_1, u_2\}$ eine Kante auf K und $G' = (V, E \setminus \{e\})$. Wir zeigen, dass auch G' zusammenhängend ist.

Dazu fixieren wir beliebige $v_1, v_2 \in V$ und einen Weg p von v_1 nach v_2 in G. Enthält p die Kante e nicht, so existiert p auch in G'. Enthält p die Kante e, so existiert ein Weg p' von v_1 nach v_2 in G', der anstatt e die verbliebene Verbindung entlang K zwischen u_1 und u_2 benutzt.

G' ist folglich zusammenhängend, was, da G' nur $|V| - 2$ Kanten enthält, ein Widerspruch zu Lemma 9.11 ist. $\square$

Lemma 9.13

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
Aus G kreisfrei und $|E| = |V| - 1$ folgt G zusammenhängend.

Beweis: Es sei G kreisfrei und $|E| = |V| - 1$.

$V_1, \ldots, V_s$ seien die Zusammenhangskomponenten von G und $E_1, \ldots, E_s$ die dazugehörigen Kantenmengen. Zu zeigen ist, dass $s = 1$.

Da G kreisfrei ist, gilt $|E_j| \leq |V_j| - 1$ für alle $j = 1, \ldots, s$ (Lemma 9.10).

Damit gilt

$$|E| = \sum_{j=1}^{s} |E_j| \leq \sum_{j=1}^{s} (|V_j| - 1) = \left(\sum_{j=1}^{s} |V_j| \right) - s = |V| - s,$$

woraus $s = 1$ folgt. $\square$

Azyklische gerichtete Graphen (1)

Definition 9.14

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **azyklisch**, falls G keine gerichteten Kreise enthält (d. h., aus $v \overset{*}{\underset{G}{\leftrightarrow}} w$ folgt $v = w$).

Lemma 9.15

*Azyklische Graphen haben **Quellen** (d. h. Knoten vom Ingrad 0) und **Senken** (d. h. Knoten vom Ausgrad 0). Jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem gerichteten Weg von einer Quelle zu einer Senke.*

Beweis:

Sei $v \in V$ keine Quelle. Wir betrachten den Algorithmus

$q \leftarrow v$
while $indeg_G(q) > 0$ **do**
  $q \leftarrow v'$ for some v' with $(v', q) \in E$.

Azyklische gerichtete Graphen (2)

Dieser Algorithmus endet, da G kreisfrei, nach endlich vielen Schritten in einer Quelle q, von der aus ein Weg zu v verläuft.

Nehmen nun an, dass $v \in V$ keine Senke, und betrachten den Algorithmus

$s \leftarrow v$
while $\mathit{outdeg}_G(s) > 0$ **do**
    $s \leftarrow v'$ for some v' with $(s, v') \in E$.

Dieser Algorithmus endet, da G kreisfrei, nach endlich vielen Schritten in einer Senke s, die von v aus erreichbar ist. □

Definition 9.16

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s$ die Partition von V in die starken Zusammenhangskomponenten.

Der folgende Graph $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ wird als **Faktorgraph von** G bezeichnet:

Es gelte $\bar{V} = \{v_1, \ldots, v_s\}$ und für alle $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq s$ gelte $(v_i, v_j) \in \bar{E}$ genau dann, wenn eine Kante $(v, v') \in E$ mit $v \in V_i$ und $v' \in V_j$ existiert.

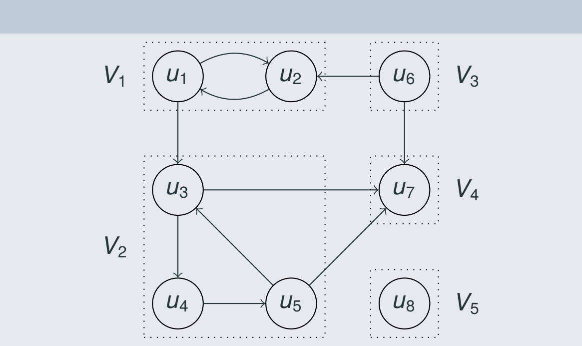
Lemma 9.17

Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist der Faktorgraph $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ von G azyklisch.

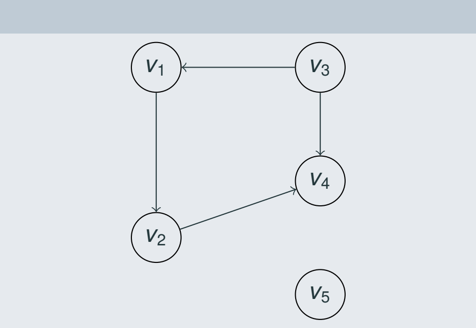
Beweis: Angenommen, es existieren Knoten $v_i, v_j \in \bar{V}$, die auf einem Kreis in $\bar{G}$ liegen. Dann gibt es einen Kreis in G der Knoten aus V_i und V_j enthält, d. h. $V_i = V_j$, also $v_i = v_j$. $\square$

Faktorgraphen - Beispiel

$G = (V, E)$



$\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$



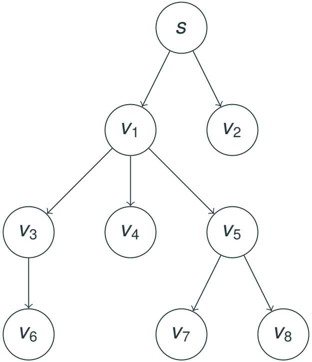
Beachte: $\bar{G}$ ist azyklisch!

Definition 9.18

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt Baum mit Wurzel $s \in V$, falls jeder Knoten in V auf genau einem Weg von s aus erreichbar ist.

- Gerichtete Bäume sind azyklisch. (Ansonsten wären die Knoten entlang eines Kreises auf mehreren Wegen von s aus erreichbar.)
- Jeder gerichtete Baum hat genau eine Quelle (d. h. Knoten vom Ingrad 0), nämlich die Wurzel s. (Annahme, es gäbe eine weitere Quelle s'. Dann wäre, da $\mathit{indeg}_G(s') = 0$, diese nicht von der Wurzel s aus erreichbar.)
- Für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $\mathit{indeg}_G(v) = 1$. (Bei $\mathit{indeg}_G(v) > 1$, wäre v über mehr als einen Weg von s aus erreichbar.)
- Senken (d. h. Knoten vom Ausgrad 0) in gerichteten Bäumen heißen auch **Blätter**.

Gerichtete Bäume - Beispiel



- Wurzel: s.
- Blätter: v_2, v_4, v_6, v_7, v_8.

Definition 9.19

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel $s \in V$.

- Die **Tiefe** $depth_G(v)$ eines Knotens $v \in V$ ist gleich der Länge des eindeutig bestimmten Weges von s nach v.
- $depth(G) = \max_{v \in V} depth_G(v)$.
- Die **Höhe** $height_G(v)$ eines Knotens v ist gleich der Länge eines längsten Wegs von v zu einer Senke.

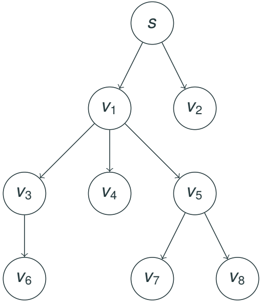
Beobachtung: Es gilt $depth(G) = height_G(s)$.

Definition 9.20

Ein gerichteter Baum $T = (V, E)$ mit Wurzel $s \in V$ heißt **binärer Baum** (oder **Binärbaum**), falls $outdeg_G(v) \leq 2$ für alle $v \in V$.

Gerichtete Bäume, Tiefe und Höhe - Beispiel

$G = (V, E)$ mit Wurzel s:

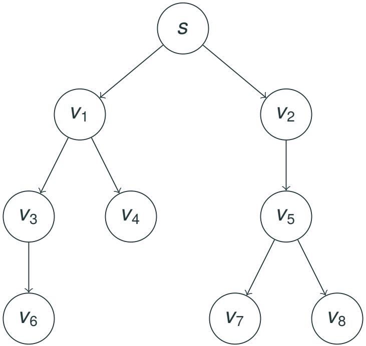


Es gilt bspw.:

- $depth_G(v_1) = 1$, $height_G(v_1) = 2$.
- $depth(G) = height_G(s) = 3$.
- G ist kein Binärbaum, wegen $outdeg_G(v_1) = 3 > 2$.

Binärer Baum - Beispiel

Binärbaum $G = (V, E)$ mit Wurzel s:



Eigenschaften Binärer Bäume (1)

Lemma 9.21

Es sei $G = (V, E)$ ein Binärbaum mit Wurzel $s \in V$. Für alle natürlichen Zahlen $d \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens 2^d Knoten der Tiefe d.

Beweis per Induktion über d:

- **Induktionsanfang:** Wurzel s ist einziger Knoten der Tiefe $d = 0$.
- **Induktionsschritt:** Wir fixieren beliebiges $d > 0$ und setzen voraus, dass Lemma 9.21 für alle $d' < d$ gilt.

  Sei S_d die Menge der Knoten der Tiefe d in G und sei S' die Menge der Vorgänger dieser Knoten.

  Offensichtlich haben alle Knoten in S' die Tiefe $d - 1$, also $|S'| \leq 2^{d-1}$ nach Induktionsvoraussetzung.

  Da jeder Knoten in S' höchstens zwei Nachfolger hat, gilt $|S_d| \leq 2 \cdot |S'| \leq 2 \cdot 2^{d-1} = 2^d$. $\square$

Eigenschaften Binärer Bäume (2)

Lemma 9.22

Jeder Binärbaum der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ hat höchstens $2^{d+1} - 1$ Knoten.

Beweis: Wir fixieren einen beliebigen Binärbaum $G = (V, E)$ der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ und bezeichnen für $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq d$, mit S_i die Menge der Knoten der Tiefe i. Laut Lemma 9.21 gilt $|S_i| \leq 2^i$, also

$$|V| = \sum_{i=0}^{d} |S_i| \leq \sum_{i=0}^{d} 2^i = \frac{1 - 2^{d+1}}{1 - 2} = 2^{d+1} - 1. \square$$

Definition 9.23

Ein binärer Baum der Tiefe $d \in \mathbb{N}$ heißt **vollständig**, falls dieser 2^d Blätter und $2^{d+1} - 1$ Knoten hat.