Formale Grundlagen der Informatik

Herbstsemester 2020

Prof. Dr. Matthias Krause
Dr. Matthias Hamann

Kombinatorik

(Stand: Oktober 2020)

Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Universität Mannheim

Kombinatorik

Typische Problemstellung der Kombinatorik

Problemstellung: Bestimme die Kardinalität $|M|$ für eine gegebene endliche Menge M.

Mögliche Herangehensweise:

- Finde eine geeignete Partition $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_s$ von M.
- Bestimme die Kardinalitäten $|M_j|$ der Teilmengen M_j, $j = 1, \ldots, s$, z. B. durch Konstruktion geeigneter bijektiver Abbildungen in Mengen, deren Kardinalität bekannt ist.
- Berechne $|M|$ gemäß

$$|M| = \sum_{j=1}^{s} |M_j|.$$

Kardinalität des karthesischen Produkts (I)

Lemma 1

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und alle nichtleeren endlichen Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gilt, dass

$$|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ \cdots \ \cdot |M_n|.$$

Beweis per Induktion über n:

- **IA:** Fall $n = 1$ offensichtlich.
- **IV:** Die Behauptung gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
- **IS:** Wir fixieren beliebige nichtleere endliche Mengen $M_1, \ldots, M_{n+1}$, wobei $M_{n+1} = \{m_1, \ldots, m_s\}$, und zeigen, dass für $\mathcal{M} := M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \times M_{n+1}$

$$|\mathcal{M}| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ \cdots \ \cdot |M_n| \cdot s.$$

Dazu partitionieren wir die Menge $\mathcal{M}$ in s Teilmengen $\mathcal{M}^j$, $j = 1, \ldots, s$, wobei

$$\mathcal{M}^j = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{M} \mid x_{n+1} = m_j\}.$$

Kardinalität des karthesischen Produkts (II)

Offensichtlich existiert für alle $j = 1, \ldots, s$ eine bijektive Abbildung von $\mathcal{M}^j$ nach $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, nämlich die des Streichens der letzten Komponente einer Eingabe $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{M}^j$.

Daraus folgt gemäß Induktionsvoraussetzung, dass

$$|\mathcal{M}| = \sum_{j=1}^{s} |\mathcal{M}^j| = s \cdot |M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n|$$

$$\stackrel{\text{(IV)}}{=} |M_1| \cdot |M_2| \cdot \; \cdots \; \cdot |M_n| \cdot s. \; \square$$

Beispiel

- $\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} = \{(1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 5), (2, 5)\}$
- $|\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\}| = 2 \cdot 3 = 6$

Lemma 2

Für alle endlichen Mengen M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis: Wir fixieren eine beliebige endliche Menge M und setzen $n = |M|$. Falls $n > 0$, sei $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$.

Das Lemma gilt offensichtlich für den Fall $n = 0$, da $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

Für $n \geq 1$ definieren wir eine bijektive Abbildung $\chi : \mathcal{P}(M) \to \{0,1\}^n$.

Für alle $M' \in \mathcal{P}(M)$ (also $M' \subseteq M$) sei

$$\chi(M') = (\chi(M')_1, \ldots, \chi(M')_n) \in \{0,1\}^n.$$

Hierbei gelte für i, $1 \leq i \leq n$, dass $\chi(M')_i = 0$, falls $m_i \notin M'$, und $\chi(M')_i = 1$, falls $m_i \in M'$.

Also $|\mathcal{P}(M)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$. $\square$

Beispiel $M' = \{m_2, m_3, m_5\} \subseteq \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, $\chi(M') = (0,1,1,0,1)$.

Beispiel Kardinalität der Potenzmenge

Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

- $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $\mathcal{P}(M)$ gleichmächtig zu $\{0, 1\}^3$. Bijektion bspw.:

$$
\begin{array}{lcl}
\emptyset & \mapsto & (0,0,0) \\
\{1\} & \mapsto & (1,0,0) \\
\{2\} & \mapsto & (0,1,0) \\
\{3\} & \mapsto & (0,0,1) \\
\{1,2\} & \mapsto & (1,1,0) \\
\{1,3\} & \mapsto & (1,0,1) \\
\{2,3\} & \mapsto & (0,1,1) \\
\{1,2,3\} & \mapsto & (1,1,1)
\end{array}
$$

- $|\mathcal{P}(M)| = |\{0, 1\}^3| = 2^3 = 8$

Definition 3

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ und k, $0 \leq k \leq n$, bezeichne $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Beobachtung: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Lemma 4

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ und k, $0 \leq k \leq n$, gilt:

(1) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ *für* $0 < k < n$ *bzw.* $\binom{n}{k} = 1$ *für* $k \in \{0, n\}$.

(3) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Beweis (1): Wir partitionieren die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer n-elementigen Menge M in $n+1$ Teilmengen $\mathcal{P}(M)_i$.

Für alle i, $0 \leq i \leq n$, enthalte $\mathcal{P}(M)_i$ alle Teilmengen von M der Kardinalität i.

Dann gilt

$$2^n = |\mathcal{P}(M)| = \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{P}(M)_i| = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}. \square$$

Beweis (2): Es sei $n \geq 1$ und $0 < k < n$ und $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Wir partitionieren $\mathcal{P}(M)_k$ in zwei Teilmengen A und B, wobei A alle k-elementigen Teilmengen von M enthält, die x_n enthalten, und B alle k-elementigen Teilmengen von M enthält, die x_n nicht enthalten.

Offensichtlich ist $B = \mathcal{P}(M \setminus \{x_n\})_k$, also $|B| = \binom{n-1}{k}$.

Wir definieren nun eine bijektive Abbildung von A nach $\mathcal{P}(M \setminus \{x_n\})_{k-1}$, indem wir aus allen Mengen in A das Element x_n herausstreichen.

Also ist $|A| = |\mathcal{P}(M \setminus \{x_n\})_{k-1}| = \binom{n-1}{k-1}$ und somit

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}(M)_k| = |A| + |B| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \square$$

Beweis (3) per Induktion über n: Definieren $0! = 1$.

Damit gilt für alle n, dass $1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!}$, und damit der **Induktionsanfang** für $n \leq 1$.

Induktionsschritt: Fixieren beliebiges $n \geq 1$ und setzen voraus, dass Aussage (3) für alle $n' \leq n$ und alle k', $1 \leq k' \leq n' - 1$ gilt.

Wir fixieren ein beliebiges k, $0 \leq k \leq n - 1$.

Gemäß Aussage (2) des Lemmas gilt:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$$
$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k'!((n+1)-k')!}. \square$$

Beispiel Binomialkoeffizienten

Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

- $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $\mathcal{P}(M)_0 = \{\emptyset\}$, $|\mathcal{P}(M)_0| = 1 = \binom{3}{0}$
- $\mathcal{P}(M)_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $|\mathcal{P}(M)_1| = 3 = \binom{3}{1}$
- $\mathcal{P}(M)_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, $|\mathcal{P}(M)_2| = 3 = \binom{3}{2}$
- $\mathcal{P}(M)_3 = \{\{1, 2, 3\}\}$, $|\mathcal{P}(M)_3| = 1 = \binom{3}{3}$
- Es gilt $\mathcal{P}(M) = \bigcup_{i=0}^{3} \mathcal{P}(M)_i$ und $\mathcal{P}(M)_i \cap \mathcal{P}(M)_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
- $|\mathcal{P}(M)| = 2^3 = 8 = 1 + 3 + 3 + 1 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

Das Pascal'sche Dreieck

Regeln $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \; 10 \; 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

Anzahl Partitionen (I)

Definition 5

Sei M eine nichtleere Menge. Dann bezeichne $Part(M)$ die Menge der Partitionen von M und $Part_k(M)$ die Menge der Partitionen von M in k nichtleere Teilmengen.

Für $n \geq 1$ bezeichne B_n die sogenannte *Bell-Zahl* bzgl. n, d. h. die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge.

Für $n \geq 1$ und $1 \leq k \leq n$ bezeichne $\left\{ n \atop k \right\}$ die *Stirling-Zahl zweiter Art* bzgl. n, d. h. die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k nichtleere Teilmengen.

Es gilt

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\},$$

sowie $\left\{ n \atop 1 \right\} = \left\{ n \atop n \right\} = 1$ und $\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$.

Beispiel Anzahl Partitionen

Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

- $Part_1(M) = \{\{\{1, 2, 3\}\}\}$
- $$\begin{aligned} Part_2(M) = \{&\{\{1\}, \{2, 3\}\},\\ &\{\{2\}, \{1, 3\}\},\\ &\{\{3\}, \{1, 2\}\}\} \end{aligned}$$
- $Part_3(M) = \{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\}$
- $\left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1$
- $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3 = 2^{3-1} - 1$
- $\left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1$
- $B_3 = \left\{ {3 \atop 1} \right\} + \left\{ {3 \atop 2} \right\} + \left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1 + 3 + 1 = 5$

Beispiel Anzahl Partitionen

Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Beachte für $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 2^{3-1} - 1 = 3$:

- $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $$\begin{aligned} Part_2(M) = \{&\{\{1\}, \{2, 3\}\},\\ &\{\{2\}, \{1, 3\}\},\\ &\{\{3\}, \{1, 2\}\}\} \end{aligned}$$
- Sprich:

$$|Part_2(M)| = (|\mathcal{P}(M)| - 2)/2 = (2^3 - 2)/2 = 2^{3-1} - 1$$

Beispiel Anzahl Partitionen - Lemma auf Folie 10/14

Seien $n = 4$ und $k = 3$.

- $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$
- $$\begin{aligned} Part_3([4]) = \{&\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\},\\ &\{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\},\\ &\{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\},\\ &\{\{2\}, \{3\}, \{1, 4\}\},\\ &\{\{2\}, \{4\}, \{1, 3\}\},\\ &\{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}\} \end{aligned}$$

Anzahl Partitionen (II)

Lemma 6

Für alle $3 \leq k < n$ *gilt* $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$.

Beweis: Wir bezeichnen $[n] = \{1, \ldots, n\}$ und partitionieren $Part_k([n])$ in zwei Teilmengen A und B.

Teilmenge A enthalte all die Partitionen in $Part_k([n])$, die die Menge $\{n\}$ enthalten.

B enthalte all die Partitionen in $Part_k([n])$, bezüglich derer die Zahl n in einer Menge der Größe mindestens zwei liegt.

Offensichtlich existiert eine bijektive Abbildung von A nach $Part_{k-1}([n-1])$, man streiche in jeder Partition aus A einfach die Teilmenge $\{n\}$.

Außerdem existiert eine bijektive Abbildung von der Menge $Part_k([n-1]) \times [k]$ nach B.

Anzahl Partitionen (III)

Konkret ordnen wir jeder Partition $\{M_1, \ldots, M_k\}$ von $[n-1]$ und jeder Zahl j, $1 \leq j \leq k$, die Partition

$$\{M_1, \ldots, M_{j-1}, M_j \cup \{n\}, M_{j+1}, \ldots, M_k\}$$

in B zu.

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \left\{ {n \atop k} \right\} &= |Part_k([n])| = |A| + |B| \\ &= |Part_{k-1}([n-1])| + k \cdot |Part_k([n-1])| \\ &= \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}. \; \square \end{aligned}$$

Beispiel Anzahl Partitionen - Lemma auf Folie 10/14

$$
\begin{aligned}
A = \{&\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}, & B = \{&\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\},\\
&\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\}, & &\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\},\\
&\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}\} & &\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\}\}
\end{aligned}
$$

- Bijektion von A nach $Part_{3-1}([4-1])$: $\begin{array}{ccc} \{\{1\},\{4\},\{2,3\}\} & \mapsto & \{\{1\},\{2,3\}\} \\ \{\{2\},\{4\},\{1,3\}\} & \mapsto & \{\{2\},\{1,3\}\} \\ \{\{3\},\{4\},\{1,2\}\} & \mapsto & \{\{3\},\{1,2\}\} \end{array}$
- Bijektion von $Part_3([4-1]) \times [3]$ nach B: $\begin{array}{ccc} (\{\{1\},\{2\},\{3\}\},1) & \mapsto & \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\} \\ (\{\{1\},\{2\},\{3\}\},2) & \mapsto & \{\{1\},\{2,4\},\{3\}\} \\ (\{\{1\},\{2\},\{3\}\},3) & \mapsto & \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\} \end{array}$
- $|Part_3([4])| = |Part_{3-1}([4-1])| + 3 \cdot |Part_3([4-1])|$
- $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = \left\{ {4-1 \atop 3-1} \right\} + 3 \cdot \left\{ {4-1 \atop 3} \right\}$

Modifiziertes Pascal'sche Dreieck für $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Regeln $\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ und $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ und $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 15 \quad 25 \quad 10 \quad 1 \\
1 \quad 31 \quad 90 \quad 65 \quad 15 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

Anzahl Abbildungen

Definition 7

Seien M, N nichtleere Mengen. Dann bezeichnet N^M die Menge aller Abbildungen von M nach N.

Lemma 8

Es seien M, N nichtleere endliche Mengen. Dann gilt $|N^M| = |N|^{|M|}$.

Beweis: Es sei $m = |M|$ und $M = \{x_1, \dots, x_m\}$. Wir definieren eine bijektive Abbildung von N^M in das m-fache kartesische Produkt N^m über N, indem wir jeder Abbildung $f : M \to N$ aus N^M den Vektor

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m))$$

zuordnen.

Folglich ist

$$\left|N^M\right| = |N^m| = |N|^m . \square$$

Anzahl Permutationen (I)

Definition 9

Es sei M eine nichtleere Menge. Dann bezeichnet $\mathcal{S}(M)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach M. Für alle natürliche Zahlen $n \geq 1$ bezeichnet $\mathcal{S}_n$ die Menge $\mathcal{S}([n])$, wobei $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Lemma 10

Für alle natürliche Zahlen $n \geq 1$ gilt $|\mathcal{S}_n| = n!$.

Beweis: Offensichtlich ist $|\mathcal{S}_n|$ gleich der Anzahl der bijektiven Abbildungen von einer n-elementigen Menge in eine n-elementige Menge.

Wir beweisen das Lemma per Induktion über n. Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist trivial.

Anzahl Permutationen (II)

Wir fixieren eine beliebige Zahl $n+1$ mit $n+1>1$ und setzen voraus, dass das Lemma für n gilt.

Nun partitionieren wir $\mathcal{S}_{n+1}$ in $n+1$ Teilmengen $M_1,\dots,M_{n+1}$, wobei für alle $j=1,\dots,n+1$ die Menge M_j genau jene bijektiven Abbildungen von $[n+1]$ nach $[n+1]$ enthält, die $n+1$ auf j abbilden.

Damit ist für alle $j=1,\dots,n+1$ die Menge M_j gleichmächtig zur Menge aller bijektiven Abbildungen der n-elementigen Menge $[n]$ in die n-elementige Menge $[n+1]\setminus\{j\}$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt damit

$$|\mathcal{S}_{n+1}| = (n+1)\cdot|\mathcal{S}_n| \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)\cdot n! = (n+1)!. \ \square$$