Formale Grundlagen der Informatik

Herbstsemester 2020

Prof. Dr. Matthias Krause
Dr. Matthias Hamann 🔊

Halbordnungsrelationen

(Stand: 01.11.2020)

Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Universität Mannheim

Halbordnungsrelationen, Ordnungsrelationen

Halbordnungsrelationen, Ordnungsrelationen

Definition 1

Sei R eine Relation auf einer nichtleeren Menge X.

- R heißt **Halbordnungsrelation**, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- R heißt **Ordnungsrelation**, falls zusätzlich alle Elemente in X miteinander vergleichbar sind, d. h., für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$.

Halbordnungsrelationen, Ordnungsrelationen - Beispiele

Halbordnungsrelation, aber keine Ordnungsrelation:

- Gleichheitsrelation $R_= = \{(x, x) \mid x \in X\}$ auf X
- Inklusionsrelation $R_\subseteq = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- Teilbarkeitsrelation $R_| = \{(x, y) \mid x|y\}$ auf $\mathbb{N}^+$

Halbordnungsrelation und sogar Ordnungsrelation:

- Kleiner-Gleich-Relation $R_\leq = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ auf $\mathbb{N}$
- Lexikographische Ordnung (bspw. Anordnung der Worte im Duden, sprich: ..., Informant, ..., Informatik, ..., Information, ..., Informationstechnologie, ...)

Maxima, Minima, maximale und minimale Elemente

Maxima, Minima, maximale und minimale Elemente

Definition 2

Es sei (X, R) eine halbgeordnete Menge, d. h., R bezeichne eine Halbordnungsrelation auf der Menge X. Ferner sei $U \subseteq X$.

- **Maximale und minimale Elemente:** Ein Element $u \in U$ heißt maximales (bzw. minimales) Element in U, falls kein anderes Element in U größer (bzw. kleiner) als u bezüglich R ist.

  Formal: Es gilt $(u, v) \notin R$ (bzw. $(v, u) \notin R$) für alle $v \in U \setminus \{u\}$.

- **Maxima und Minima:** Ein Element $u \in U$ heißt Maximum (bzw. Minimum) von U, falls alle Elemente in U kleiner-gleich (bzw. größer-gleich) u bezüglich R sind.

  Formal: Es gilt $(v, u) \in R$ (bzw. $(u, v) \in R$) für alle $v \in U$.

Eigenschaften

- Jede Teilmenge einer halbgeordneten Menge enthält höchstens ein Maximum und höchstens ein Minimum.
- Teilmengen halbgeordneter Mengen können mehr als ein maximales bzw. minimales Element enthalten. (siehe Beispiele auf den folgenden Folien)
- In Teilmengen **geordneter** Mengen ist ein Element genau dann ein maximales (bzw. minimales) Element, wenn es das Maximum (bzw. das Minimum) ist.
  Achtung: In halbgeordneten Mengen ist das nicht der Fall. (siehe Beispiele auf den folgenden Folien)

Weitere Eigenschaften

- Enthält eine Teilmenge einer halbgeordneten Menge ein Maximum (bzw. Minimum), so ist dieses auch das einzige maximale (bzw. minimale) Element dieser Teilmenge.
  (Beweis auf Übungsblatt)
- Folgerung: Enthält eine Teilmenge einer halbgeordneten Menge mehrere verschiedene maximale (bzw. minimale) Elemente, so enthält diese Teilmenge kein Maximum (bzw. Minimum).
- **Achtung:** Für Teilmengen halbgeordneter Mengen ist es möglich, dass diese ein einziges maximales (bzw. minimales) Element, aber kein Maximum (bzw. Minimum) enthalten! (siehe Beispiele auf den folgenden Folien) In geordneten Mengen ist das nicht der Fall. (siehe vorherige Folie)

Maxima/Minima, maximale/minimale Elemente - Beispiele (1)

Erinnerung:

- $R_{\leq} = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ auf $\mathbb{N}$ ist Ordnungsrelation.
- $R_{\subseteq} = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist Halbordnungsrelation, aber keine Ordnungsrelation.

Beispiele:

- $(\mathbb{N}, R_{\leq})$ ist eine geordnete Menge. Sei $U := \{13, 5, 4, 18, 2\}$.
  - Maximale Elemente in U: 18.
  - Minimale Elemente in U: 2.
  - Maximum von U: 18.
  - Minimum von U: 2.
- $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), R_{\subseteq})$ ist eine halbgeordente Menge. Sei $U := \{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$.
  - Maximale Elemente in U: $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$.
  - Minimale Elemente in U: $\{3\}$.
  - Maximum von U: existiert nicht.
  - Minimum von U: $\{3\}$.

Maxima/Minima, maximale/minimale Elemente - Beispiele (2)

Erinnerung:

- Teilbarkeitsrelation $R_| = \{(x, y) \mid x|y\}$ auf $\mathbb{N}^+$ ist Halbordnungsrelation, aber keine Ordnungsrelation.

Beispiele:

- $(\mathbb{N}^+, R_|)$ ist eine halbgeordnete Menge. Sei $U := \{18, 2, 3\}$.
  - Maximale Elemente in U: 18.
  - Minimale Elemente in U: 2, 3.
  - Maximum von U: 18.
  - Minimum von U: existiert nicht.
- $(\mathbb{N}^+, R_|)$ ist eine halbgeordnete Menge. Sei $U := \{3\} \cup \{2^i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$.
  - Maximale Elemente in U: 3.
  - Minimale Elemente in U: 2, 3.
  - Maximum von U: existiert nicht.
  - Minimum von U: existiert nicht.

Obere und untere Schranken, Suprema und Infima

Definition 3

Es sei (X, R) eine halbgeordnete Menge und $U \subseteq X$.

- **Obere und untere Schranken:** Ein Element $x \in X$ heißt obere (bzw. untere) Schranken von U, falls alle Elemente in U kleiner-gleich (bzw. größer-gleich) x sind.

  Formal: Es gilt $(v, x) \in R$ (bzw. $(x, v) \in R$) für alle $v \in U$.

- **Suprema und Infima:** Ein Element $x \in X$ heißt Supremum (bzw. Infimum) von U, falls x eine kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von U ist.

  Formal: x ist eine obere (bzw. untere) Schranke von U und für alle oberen (bzw. unteren) Schranken x' von U gilt $(x, x') \in R$ (bzw. $(x', x) \in R$).

Eigenschaften

- Jede Teilmenge einer halbgeordneten Menge besitzt höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum. (Beweis auf Übungsblatt)
- Enthält eine Teilmenge einer halbgeordneten Menge ein Maximum (bzw. ein Minimum), so ist das Maximum auch das Supremum (bzw. das Minimum auch das Infimum) dieser Teilmenge.
- Liegt das Supremum (bzw. das Infimum) einer Teilmenge U einer halbgeordneten Menge in U, dann ist das Supremum gleich dem Maximum von U (bzw. das Infimum gleich dem Minimum von U).
- Es gibt Beispiele für Teilmengen U halbgeordneter Mengen, für die das Supremum (bzw. das Infimum) nicht in U liegt. (siehe folgende Folie)

Obere/Untere Schranken, Suprema/Infima - Beispiele

Erinnerung:

- $R_{\leq} = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ auf $\mathbb{N}$ ist Ordnungsrelation.
- $R_{\subseteq} = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ auf $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ ist Halbordnungs-, aber keine Ordnungsrelation.

Beispiele:

- $(\mathbb{N}, R_{\leq})$, $U := \{13, 5, 4, 18, 2\}$.
  - Obere Schranken von U: 18, 19, 20, 21, ...
  - Untere Schranken von U: 0, 1, 2.
  - Supremum von U: 18.
  - Infimum von U: 2.
- $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), R_{\subseteq})$, $U := \{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$.
  - Obere Schranken von U: $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$.
  - Untere Schranken von U: $\emptyset$, $\{3\}$.
  - Supremum von U: $\{2, 3, 4\}$.
  - Infimum von U: $\{3\}$.

Halbordnung auf den Äquivalenzklassen der Gleichmächtigkeit

Definition 4

Es seien $[M]$ und $[M']$ Äquivalenzklassen bzgl. der Gleichmächtigkeit. Es sei $[M] \leq [M']$, falls es eine injektive Abbildung von M nach M' gibt (was gleichbedeutend damit ist, dass es für alle $X \in [M]$ und $X' \in [M']$ eine injektive Abbildung von X nach X' gibt).

Lemma 5

Diese Relation ist eine Halbordnungsrelation.

Beweis: Nichttrivial ist die Antisymmetrie. Diese folgt aus dem Satz von Cantor, Bernstein, Schröder.

Theorem 6 (Cantor, Bernstein, Schröder)

Für beliebige Mengen A, B gilt: Existieren injektive Abbildungen von A nach B und von B nach A, so sind A und B gleichmächtig.

Beweis:

- Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv. Zu zeigen: es existiert $h : A \to B$ bijektiv.
- Es sei $X := im(g) = g(B) \subseteq A$. Die Abbildung $\tilde{g} : B \to X$, $\tilde{g}(x) := g(x)$, ist offensichtlich bijektiv.
- Wir definieren im Folgenden eine Abbildung $\tilde{h} : A \to X$ und zeigen, dass diese bijektiv ist. Dann leistet $h := \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}$ das Gewünschte, sprich, ist ein bijektive Abbildung von A nach B.
- Die Abbildung $F := \tilde{g} \circ f : A \to X$ ist als Komposition injektiver Abbildungen wiederum injektiv.
- Setze $Z_0 := A \setminus X$, $Z_{i+1} := F(Z_i)$ für $i \geq 0$ und $Z := \bigcup_{i \geq 0} Z_i$.
- Setze $\tilde{h}(a) := F(a)$, falls $a \in Z$, und $\tilde{h}(a) := a$, falls $a \notin Z$.
- Wir zeigen nun, dass $\tilde{h}$ eine wohldefinierte, bijektive Abbildung von A nach X ist.

Der Satz von Cantor, Bernstein, Schröder - Beweis

Erinnerung

- $F := \tilde{g} \circ f : A \to X$ ist injektiv.
- $Z_0 := A \setminus X$, $Z_{i+1} := F(Z_i)$ für $i \geq 0$, $Z := \bigcup_{i \geq 0} Z_i$.
- $\tilde{h} : A \to X$ mit $\tilde{h}(a) := F(a)$, falls $a \in Z$, und $\tilde{h}(a) := a$, falls $a \notin Z$.

Wohldefinierte Abbildung: Zeigen, dass $\tilde{h}(a) \in X$ für alle $a \in A$. Da $F(A) \subseteq X$, gilt $\tilde{h}(a) = F(a) \in X$ für alle $a \in Z$. Ferner folgt aus $a \notin Z$, dass $a \notin Z_0 = A \setminus X$ und damit $a \in X$. Also $\tilde{h}(a) = a \in X$ für alle $a \notin Z$.

Injektivität: Zeigen nun, dass $\tilde{h}$ injektiv. Da $\tilde{h}$ injektiv auf Z (da gleich F) und auf $A \setminus Z$, genügt zu zeigen, dass $\tilde{h}(a_1) \neq \tilde{h}(a_2)$ für alle $a_1 \in Z$ und $a_2 \in A \setminus Z$. Das folgt aus $\tilde{h}(a_1) \in Z$ und $\tilde{h}(a_2) = a_2 \notin Z$.

Surjektivität: Zeigen jetzt, dass $\tilde{h}$ surjektiv. Sei $x \in X$ beliebig fixiert. Falls $x \in F(Z)$, so existiert ein $a \in Z$ mit $x = F(a) = \tilde{h}(a)$. Falls $x \notin F(Z) = \bigcup_{i \geq 0} F(Z_i) = \bigcup_{i \geq 1} Z_i$, dann gilt, da $x \in X$ und damit auch $x \notin Z_0 = A \setminus X$, dass $x \notin Z = \bigcup_{i \geq 0} Z_i$, also $\tilde{h}(x) = x$. $\square$