Formale Grundlagen der Informatik

Herbstsemester 2020

Prof. Dr. Matthias Krause
Dr. Matthias Hamann

Äquivalenzrelationen

(Stand: 12.10.2020)

Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Universität Mannheim

Äquivalenzrelationen

Eigenschaften von Relationen, Äquivalenzrelationen

Definition 1

Eigenschaften von Relationen $R \subseteq X \times X$ auf einer nichtleeren Menge X:

- **Reflexivität:** $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$.
- **Symmetrie:** Aus $(x, x') \in R$ folgt $(x', x) \in R$ für alle $x, x' \in X$.
- **Antisymmetrie:** Aus $(x, x') \in R$ und $(x', x) \in R$ folgt $x = x'$ für alle $x, x' \in X$.
- **Transitivität:** Aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$ für alle $x, y, z \in X$.

Definition 2

R heißt **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Eigenschaften von Relationen - Beispiele

Sei $X = \{1, 2, 3\}$ und seien $R_1, \dots, R_7 \subseteq X \times X$ Relationen.

- $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv.
- $R_2 = \{(2,2), (3,3)\}$ ist symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.
- $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv und nicht antisymmetrisch.
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht symmetrisch.
- $R_5 = \{(1,2), (2,3)\}$ ist antisymmetrisch, aber nicht reflexiv, nicht symmetrisch und nicht transitiv.
- $R_6 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ ist antisymmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv und nicht symmetrisch.
- $R_7 = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$ ist nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch und nicht transitiv.

Äquivalenzrelationen - Beispiele

- Die Allrelation $R_{\text{ALL}} = X \times X$ auf X.
- Die Gleichheitsrelation $R_{=} = \{(x,x) \mid x \in X\}$ auf X.
- Die Relation $R_{\mathbb{Q}}$ auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ der Brüche:

$$R_{\mathbb{Q}} = \left\{ \Big((a,b), (a',b') \Big) \;\middle|\; \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \right\}.$$

- Die MOD$_m$-Relation R_{MOD_m} auf $\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}^+$:

$$R_{\text{MOD}_m} = \{(x,y) \mid x \text{ mod } m = y \text{ mod } m\}.$$

- Sei X die Menge der Studierenden der Uni Mannheim:
  $R_{\mathrm{Geb}} = \{(a,b) \mid a \text{ und } b \text{ haben selben Geburtstag}\} \subseteq X \times X$.
- Die Gleichmächtigkeit von Mengen. Seien X, Y, Z Mengen.
  - **Reflexiv:** X stets gleichmächtig zu X, da $id : X \to X$ mit $id(x) = x$ eine Bijektion von X nach X ist.
  - **Symmetrisch:** Falls X gleichmächtig zu Y, dann existiert Bijektion $f : X \to Y$. Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ist Bijektion von Y nach X. Also ist Y gleichmächtig zu X.
  - **Transitiv:** Falls X gleichmächtig zu Y und Y gleichmächtig zu Z, dann existieren Bijektionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. $g \circ f$ ist Bijektion von X nach Z. Also ist X gleichmächtig zu Z.

Äquivalenzklassen

Definition 3

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$.

- Die Menge $[x]_R = \{y \mid (x, y) \in R\}$ der zu x äquivalenten Elemente heißt **Äquivalenzklasse** von x bzgl. R.
- $X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. R.

Beispiele:

- Bzgl. der Allrelation $R_{\text{ALL}} = X \times X$ auf X gilt $[x]_{R_{\text{ALL}}} = X$ für alle $x \in X$. Damit ist $X/R_{\text{ALL}} = \{X\}$, sprich, die einzige Äquivalenzklassen von R_{ALL} ist X.
- $X/R_{=} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.
- $\mathbb{Z}/R_{\text{MOD}_m} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$, wobei

$$[i] = \{\ldots, i-2m, i-m, i, i+m, i+2m, \ldots\}$$

für $i = 0, \ldots, m-1$.

Theorem 4

Sei R Äquivalenzrelation auf einer Menge $X \neq \emptyset$. Dann ist X/R eine Partition von X, d. h., es gilt:

(1) $\bigcup_{x \in X} [x]_R = X$ *und*

(2) *für alle* $x, x' \in X$ *gilt entweder* $[x]_R = [x']_R$ *oder* $[x]_R \cap [x']_R = \emptyset$.

Beweis:

(1) Gilt, da $x \in [x]_R$ für alle $x \in X$ aufgrund der Reflexivität von R.

(2) Sei $x, x' \in X$.

- 1. Fall: $(x, x') \in R$. Wir zeigen: $[x]_R = [x']_R$.
  - Sei $y \in [x]_R$, also $(x, y) \in R$. Da $(x', x) \in R$ (aufgrund Symmetrie), gilt $(x', y) \in R$ (aufgrund Transitivität), also $y \in [x']_R$ und somit $[x]_R \subseteq [x']_R$.
  - Sei $y' \in [x']_R$, also $(x', y') \in R$. Da $(x, x') \in R$, gilt $(x, y') \in R$ (aufgrund Transitivität), also $y' \in [x]_R$ und somit $[x']_R \subseteq [x]_R$.
- 2. Fall: $(x, x') \notin R$. Wir nehmen an, dass ein $y \in [x]_R \cap [x']_R$ existiert. Dann gilt $(x, y) \in R$ und $(x', y) \in R$, also auch $(y, x') \in R$ (aufgrund Symmetrie), was $(x, x') \in R$ bedingen würde (aufgrund Transitivität), Widerspruch. Es gilt also $[x]_R \cap [x']_R = \emptyset$. $\square$

Definition 5

Es sei $\Pi = \{X_a \mid a \in A\}$ eine Partition einer nichtleeren Menge X.

Die Relation R_Π sei dadurch definiert, dass für alle $x, y \in X$ gelte:
$(x, y) \in R_\Pi$ genau dann, wenn x und y zu ein und derselben Menge X_a der Partition Π gehören.

Theorem 6

R_Π ist eine Äquivalenzrelation und $X/R_\Pi = \Pi$. (Beweis einfache ÜA) $\square$

Beispiel: Die Partition $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ der Menge $X = \{1, 2, 3\}$ definiert die Äquivalenzrelation

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}.$$