Formale Grundlagen der Informatik

Herbstsemester 2020

Prof. Dr. Matthias Krause
Dr. Matthias Hamann

Abbildungen und Mächtigkeit von Mengen

(Stand: 09.10.2020)

Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Universität Mannheim

Definition und Eigenschaften von Abbildungen

Definition 1

Es seien X, Y nichtleere Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation.

- R heißt **partielle Abbildung** von X nach Y, falls zu jedem $x \in X$ **höchstens** ein Element $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ existiert.
- Der **Urbildbereich** (Domain) $dom(R) \subseteq X$ von R enthält alle $x \in X$, für die ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ existiert.
- Der **Bildbereich** (Image) $im(R) \subseteq Y$ enthält alle $y \in Y$, für die ein $x \in X$ mit $(x, y) \in R$ existiert.
- Für $(x, y) \in R$ bezeichnet $R(x)$ das **Bild** $y \in Y$ des Elements $x \in X$ bezüglich der partiellen Abbildung R.
- R heißt **Abbildung** (Schreibweise $R : X \to Y$) von X nach Y, falls zu jedem $x \in X$ **genau** ein Element $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ existiert. (Sprich: R ist eine Abbildung, falls R eine partielle Abbildung mit $dom(R) = X$ ist.)
- $Y^X = \{R : X \to Y\}$ bezeichnet die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

Abbildungen - Beispiele

Seien $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$ und $R, S, T \subseteq X \times Y$ Relationen.

- $R = \{(1, 4), (3, 5)\}$ ist eine partielle Abbildung, aber keine Abbildung. Es gilt: $dom(R) = \{1, 3\}$, $im(R) = \{4, 5\}$.
- $S = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$ ist eine Abbildung (und damit auch eine partielle Abbildung). Es gilt: $dom(S) = \{1, 2, 3\} = X$, $im(S) = \{4, 5\}$.
- $T = \{(1, 4), (2, 5), (2, 6)\}$ ist keine partielle Abbildung (und damit auch keine Abbildung).
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist eine Abbildung mit $dom(f) = \mathbb{R}$ und $im(f) = \mathbb{R}^{\geq 0}$.
- Für alle positiven natürlichen Zahlen m ist $g : \mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, m - 1\}$ mit

  $$g(x) = x \bmod m$$

  eine Abbildung mit $dom(g) = \mathbb{Z}$ und $im(g) = \{0, 1, \ldots, m - 1\}$.

Eigenschaften von Abbildungen

- Die Komposition von partiellen Abbildungen bzw. Abbildungen ist wieder eine partielle Abbildung bzw. Abbildung.
- Die Umkehrrelation einer partiellen Abbildungen ist im Allgemeinen keine partielle Abbildung.
- Für alle nichtleeren Mengen X sei die Abbildung $id_X : X \to X$ (Identität von X) definiert durch $id_X(x) = x$ für alle $x \in X$.
- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt konstant, falls ein $y^* \in Y$ existiert, so dass $f(x) = y^*$ für alle $x \in X$.

Klassifizierung von Abbildungen

Definition 2

Es seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

- f heißt **injektiv**, falls zu jedem $y \in Y$ **höchstens** ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert.
- f heißt **surjektiv**, falls zu jedem $y \in Y$ **mindestens** ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert, d. h., falls $im(f) = Y$.
- f heißt **bijektiv**, falls zu jedem $y \in Y$ **genau** ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert, d. h., falls f injektiv und surjektiv ist.

Wichtige Beobachtung: Die Umkehrrelation einer Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Abbildung, wenn f bijektiv ist. (Beweis: siehe Übungsblatt)

Diese Abbildung wird als Umkehrabbildung oder inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet und ist ebenfalls bijektiv. (Beweis: siehe Übungsblatt)

Klassifizierung von Abbildungen - Beispiele

- $f_1 : \{1, 2, 3\} \to \{11, 12, 13\}$ mit $f_1 = \{(1, 11), (2, 13), (3, 13)\}$ ist weder injektiv noch surjektiv.
- $f_2 : \{1, 2, 3\} \to \{11, 12, 13, 14\}$ mit $f_2 = \{(1, 11), (2, 13), (3, 14)\}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- $f_3 : \{1, 2, 3, 4\} \to \{11, 12, 13\}$ mit $f_3 = \{(1, 13), (2, 11), (3, 13), (4, 12)\}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- $f_4 : \{1, 2, 3\} \to \{11, 12, 13\}$ mit $f_4 = \{(1, 12), (2, 11), (3, 13)\}$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.
- $f_5 : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ mit $f_5(x) = x$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- $f_6 : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ mit $f_6(x) = x - 1$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.
- $f_7 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f_7(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.

Eigenschaften von Abbildungen (I)

Lemma 3

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(1) *Aus g und f injektiv, folgt $g \circ f$ injektiv.*

(2) *Aus g und f surjektiv, folgt $g \circ f$ surjektiv.*

(3) *Aus g und f bijektiv, folgt $g \circ f$ bijektiv. (Folgerung aus (1) und (2))*

Eigenschaften von Abbildungen (I)

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(1) *Aus g und f injektiv, folgt $g \circ f$ injektiv.*

Beweis (1): Angenommen, es existieren $x, x' \in X$ und $z \in Z$ so dass $g \circ f(x) = g \circ f(x') = z$. Offensichtlich gilt $f(x) \in g^{-1}(z)$ und $f(x') \in g^{-1}(z)$ also $f(x) = f(x')$, da g injektiv. Da f injektiv folgt daraus $x = x'$, also $g \circ f$ injektiv.

Eigenschaften von Abbildungen (I)

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(2) *Aus g und f surjektiv, folgt $g \circ f$ surjektiv.*

Beweis (2): Für alle $z \in Z$ ist $(g \circ f)^{-1}(z) = \bigcup_{y \in g^{-1}(z)} f^{-1}(y)$. Wenn g und f surjektiv, so sind $g^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ und $f^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ nicht leer und damit ist auch $(g \circ f)^{-1}(z)$ nicht leer. $\square$

Eigenschaften von Abbildungen (II)

Lemma 4

Es seien n, m positive natürliche Zahlen und $f : [n] \to [m]$ eine Abbildung.

- *Ist f surjektiv, so gilt $n \geq m$.*
- *Ist f injektiv, so gilt $n \leq m$.*
- *Folgerung: Ist f bijektiv, so gilt $n = m$.*

Beweis: Ist f surjektiv (bzw. injektiv), so muss jedes Element aus $[m]$ mindestens einmal (bzw. höchstens einmal) als rechte Seite in der Menge der Paare $\{(i, f(i)) \mid i = 1, \cdots, n\}$ vorkommen. Das geht nur wenn $n \geq m$ (bzw. $n \leq m$). $\square$

Eigenschaften von Abbildungen (III)

Lemma 5

Sei M eine nichtleere endliche Menge (bspw. $M = [n]$ mit $n \in \mathbb{N}^+$).
Es gilt: $f : M \to M$ injektiv g.d.w. surjektiv g.d.w. bijektiv.

Zu zeigen ist also (unter der Bedingung, dass M endlich ist): f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv. (Der Rest folgt per Definition.)

Beweis:

- Sei f injektiv. Dann gilt $|im(f)| = |M|$. Zusammen mit $im(f) \subseteq M$ folgt $im(f) = M$. Also ist f surjektiv.
- Sei umgekehrt f surjektiv. Wenn f nicht injektiv wäre, dann gäbe es mindestens zwei Elemente, die auf dasselbe Element abgebildet werden, also $|im(f)| < |M|$ und damit $im(f) \neq M$, ein Widerspruch zur Surjektivität von f; also ist f injektiv. $\square$

Kardinalität, Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit

Definition 6

Eine Menge M heißt **endlich**, falls $M = \emptyset$ oder es eine positive natürliche Zahl n und eine bijektive Abbildung von M nach $[n]$ gibt. Im letzteren Fall heißt n die **Kardinalität** von M (Schreibweise $|M| = n$, wobei $|\emptyset| = 0$). Eine nicht endliche Menge M heißt **unendlich** ($|M| = \infty$).

Lemma 7

Es seinen X, Y nichtleere endliche Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

(1) *Ist f surjektiv, so gilt $|X| \geq |Y|$.*

(2) *Ist f injektiv, so gilt $|X| \leq |Y|$.*

(3) *Ist f bijektiv, so gilt $|X| = |Y|$. (Folgerung aus (1) und (2))*

Beweis: Es existieren also $n, m \in \mathbb{N}^+$ mit $|X| = n$, $|Y| = m$ und bijektive Abbildungen $g : X \to [n]$, $h : Y \to [m]$. Ist f surjektiv (bzw. injektiv), dann ist $h \circ f \circ g^{-1} : [n] \to [m]$ gemäß Lemma 3 als Komposition surjektiver (bzw. injektiver) Abbildungen wiederum surjektiv (bzw. injektiv), was gemäß Lemma 4 nun $|X| = n \geq m = |Y|$ (bzw. $|X| = n \leq m = |Y|$) impliziert. $\square$

Gleichmächtigkeit

Definition 8

Zwei Mengen X, Y heißen gleichmächtig (Schreibweise: $X \sim Y$), falls eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert.

Lemma 9

Zwei nichtleere endliche Mengen X, Y sind genau dann gleichmächtig, wenn $|X| = |Y|$.

Beweis:
(Richtung $\Rightarrow$) Seien X, Y nichtleere endliche Mengen mit $X \sim Y$. Dann existiert eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ und aus Lemma 7 folgt $|X| = |Y|$.
(Richtung $\Leftarrow$) Seien nun X, Y nichtleere endliche Mengen mit $|X| = |Y|$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}^+$ mit $|X| = |Y| = n$ und bijektive Abbildungen $g : X \to [n]$, $h : Y \to [n]$. Die Abbildung $h^{-1} \circ g : X \to Y$ ist als Komposition bijektiver Abbildungen wiederum bijektiv und somit gilt $X \sim Y$. $\square$

Abzählbarkeit und Beispiele abzählbarer Mengen (I)

Definition 10

Eine Menge X heißt abzählbar, falls X endlich oder gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist.

(1) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. (Die Abbildung $f(x) = 2x$ für $x \geq 0$ und $f(x) = -2x - 1$ für $x < 0$ definiert eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$.)

(2) Jede unendliche Teilmenge $X \subseteq \mathbb{N}$ ist abzählbar. (Ordne X der Größe nach. Die entsprechende Nummerierung liefert eine Bijektion zwischen X und $\mathbb{N}$.)

(3) Existiert eine injektive Abbildung $f : X \to \mathbb{N}$, so ist X abzählbar. (da X gleichmächtig zur abzählbaren Menge $im(f) \subseteq \mathbb{N}$ ist, siehe (2))

(4) Falls X abzählbar und $Y \subseteq X$, dann ist auch Y abzählbar. (Sei f eine Bijektion zwischen X und $\mathbb{N}$. Dann ist f eingeschränkt auf Y eine injektive Abbildung von Y nach $\mathbb{N}$, siehe (3).)

Beispiele abzählbarer Mengen (II)

(5) Sind X, Y abzählbar, dann ist auch $X \times Y$ abzählbar. (Seien $f : X \to \mathbb{N}$ und $g : Y \to \mathbb{N}$ Injektionen. Dann liefert $h(x, y) = 2^{f(x)} \cdot 3^{g(y)}$ eine Injektion von $X \times Y$ nach $\mathbb{N}$.)

(6) Sei X abzählbar und $f : X \to Y$ surjektiv. Dann ist auch Y abzählbar. (Sei $nr : X \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann liefert

$$g(y) = \min_{x' \in X} \{nr(x') \mid f(x') = y\}$$

eine injektive Abbildung von Y nach $\mathbb{N}$.)

(7) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. (da die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$$

mit $f(a, b) = \frac{a}{b}$ surjektiv ist)

Achtung: Unendliche Mengen können zu echten Teilmengen gleichmächtig sein, endliche nie.

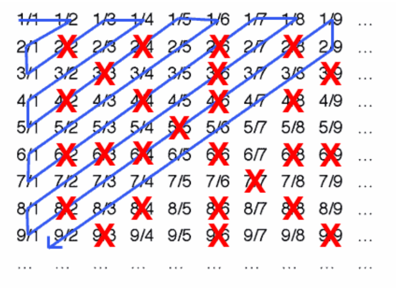
Cantors erstes Diagonalargument

Theorem 11

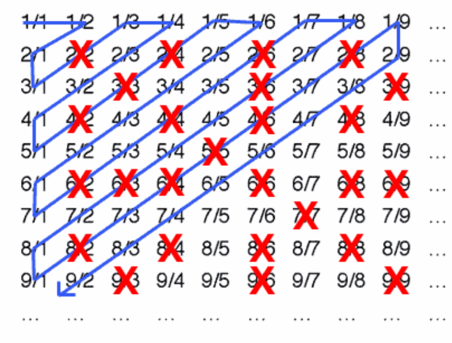
Die Menge $\mathbb{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen ist abzählbar.

(Folgt eigentlich bereits aus (7) und (4) der vorangegangenen Beispiele. Hier aber nun eine konkrete Bijektion von $\mathbb{Q}^+$ nach $\mathbb{N}$.)

Beweis: Man ordnet alle positiven Brüche in einem zweidimensionalen Schema an und läuft dann diagonal durch, wobei kürzbare Brüche übersprungen werden.



Cantors erstes Diagonalargument



Durch Weglassen doppelter Elemente entsteht die Abzählung der positiven rationalen Zahlen:

$1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ 3,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 4,\ 5,\ \frac{1}{5},\ \ldots$

Durch das Überspringen kürzbarer Brüche liegt für jede positive rationale Zahl genau ein Repräsentant in dieser Abzählung, wodurch die gewünschte Bijektion nach $\mathbb{N}$ hergestellt ist.

Definition 12

Eine Menge X heißt überabzählbar, falls X nicht abzählbar ist.

Theorem 13

(Satz von Cantor) *$X \not\sim \mathcal{P}(X)$ für alle nichtleeren Mengen X.*

Beweis: Wir nehmen an, dass eine nichtleere Menge X und eine bijektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ existiert.

Wir definieren eine Teilmenge Y von X durch

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Da f bijektiv ist, hat $Y \in \mathcal{P}(X)$ ein Urbild x^*, d. h., $f(x^*) = Y$.

Daraus folgt, dass $x^* \in Y$ genau dann, wenn $x^* \notin f(x^*) = Y$, Widerspruch. $\square$

Die Überabzählbarkeit der rellen Zahlen (Cantors zweites Diagonalargument)

Theorem 14

Die Menge der rellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Wir zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to [0, 1)$ geben kann.

Sei $f : \mathbb{N} \to [0, 1)$ beliebig fixiert und die Elemente von $[0, 1)$ eindeutig über ihre kanonische Zahlenentwicklung im Dezimalsystem repräsentiert (sprich: Wir repräsentieren bspw. $0{,}4\overline{9} = 0{,}5$ eindeutig durch $0{,}5\overline{0}$.), d. h.,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0{,}a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}\ldots \\ f(1) &= 0{,}a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \\ f(2) &= 0{,}a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

mit Dezimalstellen $a_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$. Wir betrachten nun die reelle Zahl $x := 0{,}b_0b_1b_2b_3b_4\ldots$ definiert durch

$$b_i := \begin{cases} 2 & \text{falls } a_{ii} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{ii} \neq 1 \end{cases}$$

und stellen fest, dass $x \notin im(f)$, aber $x \in [0, 1)$, woraus $im(f) \neq [0, 1)$ folgt. Da f beliebig fixiert wurde, gilt damit, dass keine surjektive Abbildung und damit insbesondere auch keine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $[0, 1)$ existiert. Somit ist $[0, 1)$, da unendlich und nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, überabzählbar, weswegen auch die Obermenge $\mathbb{R}$ von $[0, 1)$ überabzählbar sein muss. $\square$