Formale Grundlagen der Informatik

Herbstsemester 2020

Prof. Dr. Matthias Krause
Dr. Matthias Hamann

Mengen und Relationen

(Stand: 02.09.2020)

Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Universität Mannheim

Mengen

Definition 1

Mengen sind Zusammenfassungen von wohlunterschiedenen Elementen eines vorgegebenen Universums $\mathcal{U}$ (kontextbezogen oder ALLES).

Eine Menge M ist definiert durch das Prädikat $x \in M$ über $\mathcal{U}$.

- **Inklusion:** Eine Menge M' heißt **Teilmenge** einer Menge M, falls für alle Elemente x aus $\mathcal{U}$ gilt, dass aus $x \in M'$ folgt $x \in M$. Schreibweise: $M' \subseteq M$.
  Falls zudem $M' \neq M$ gilt, heißt M' **echte Teilmenge** von M. Schreibweise: $M' \subset M$.

  Beispiel: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Es gilt: $A \subseteq B$, $A \subset B$, $B \subseteq B$.
- **Leere Menge:** Die leere Menge $\emptyset$ ist dadurch gegeben, dass $x \in \emptyset$ für alle Elemente von $\mathcal{U}$ falsch ist.

Spezielle Mengen

- $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- $\mathbb{R} =$ „reelle Zahlen“ (Konstruktion: spätere Veranstaltung)
- $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\ldots$

Mengenoperationen und Disjunktheit

Es seien A, B Mengen über einem Universum $\mathcal{U}$.

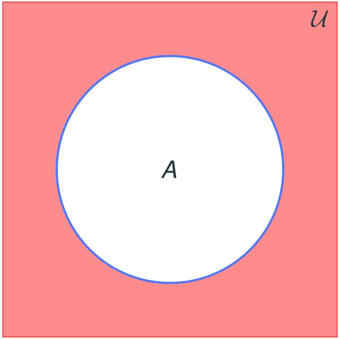
- Komplement $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$
- Vereinigung $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Durchschnitt $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Symmetrische Differenz $A \triangle B = \{x \mid (x \in A) \oplus (x \in B)\}$
- Mengendifferenz $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

Man beachte die Beziehungen zwischen den Mengenoperationen und den aussagenlogischen Operationen!

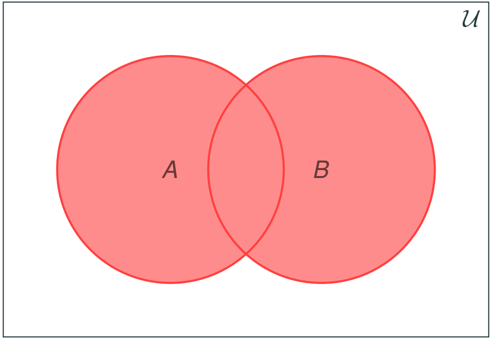
Definition 2

Mengen M, N heißen **disjunkt**, falls $M \cap N = \emptyset$.

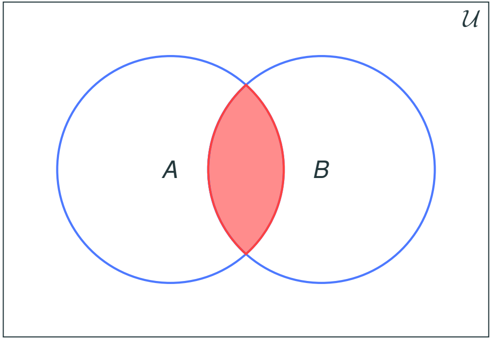
Komplement $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$



Vereinigung $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

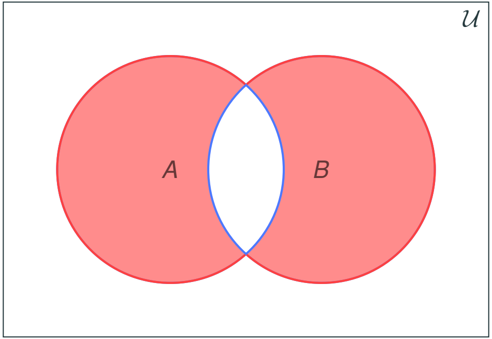


Durchschnitt $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



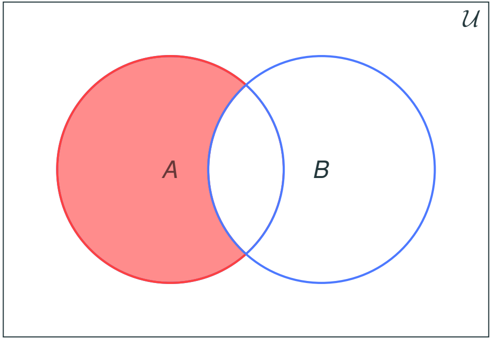
Mengenoperationen und Disjunktheit - Veranschaulichung

Symmetrische Differenz $A \triangle B = \{x \mid (x \in A) \oplus (x \in B)\}$



Mengenoperationen und Disjunktheit - Veranschaulichung

Mengendifferenz $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \land (x \notin B)\}$



Mengenoperationen und Disjunktheit - Beispiele

Es seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ Mengen über dem Universum $\mathbb{N}^+$.

- Komplement $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$
- Vereinigung $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Durchschnitt $A \cap B = \{3\}$
- Symmetrische Differenz $A \triangle B = \{1, 2, 4, 5\}$
- Mengendifferenz $A \setminus B = \{1, 2\}$

Potenzmenge und Partitionen

Definition 3

Für jede Menge M bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die **Potenzmenge** von M, d. h. die Menge aller Teilmengen von M.

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Definition 4

M nichtleere Menge. Eine Familie $\{M_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von nichtleeren Teilmengen von M heißt **Partition** von M, falls

(1) M_i, M_j disjunkt für alle $i \neq j \in I$,

(2) $\bigcup_{i \in I} M_i = M$.

$Part(M)$ bezeichnet die Menge aller Partitionen von M.

Beispiel: $\{\{2\}, \{1,3\}\}$ ist Partition von $\{1,2,3\}$. (nicht die einzige!)

Das karthesische Mengenprodukt, Wörter, Sprachen

Definition 5

Es seien M, N nichtleere Mengen.

- Das **karthesische Produkt** $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ bezeichnet die Menge der geordneten Paare mit linker Seite aus M und rechter Seite aus N.
- Für $n \in \mathbb{N}^+$ bezeichnet $M^n = M \times M \times \cdots \times M$ die Menge der n-Tupel bzw. der Vektoren bzw. der **Wörter** der Länge n über (dem **Alphabet**) M.
- Es bezeichnet $M^* = \bigcup_{n \geq 0} M^n$ die Menge der Wörter über M. Hierbei bezeichnet $M^0 = \{\epsilon\}$ die Menge, die nur aus dem leeren Wort ϵ besteht.
- Teilmengen $L \subseteq M^*$ heißen **Sprachen** über M.

Karthes. Mengenprodukt, Wörter, Sprachen - Beispiele

Es seien $M = \{0, 1\}$, $N = \{2, 3\}$.

- $M \times N = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$
- $M^3 = M \times M \times M = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$
- $M^* = \{\epsilon, 0, 1, (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots\}$
- Beispiel für eine endliche Sprachen über M: $\{\epsilon, 1, (0, 1), (0, 0, 0, 0)\}$.
- Beispiel für eine unendliche Sprachen über M: Die Menge aller (nichtleeren) Worte, die nur aus Einsen bestehen, d. h. $\{1, (1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), \dots\}$.

Relationen

Definition 6

Es seien X, Y nichtleere Mengen. Teilmengen $R \subseteq X \times Y$ heißen **Relationen zwischen X und Y**. Ist $X = Y$, so heißen Teilmengen $R \subseteq X \times X$ **Relationen auf X**.

Häufige Schreibweise: xRy oder $x \sim_R y$ für $(x, y) \in R$.

Beispiele:

- Die Allrelation $R_{\text{ALL}} = X \times Y$.
- Die Gleichheitsrelation $\{(x, x) \mid x \in X\}$ auf X.
- Die MOD_m-Relation R_{MOD_m} auf $\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$:

  $$R_{\text{MOD}_m} = \{(x, y) \mid x \bmod m = y \bmod m\}.$$

  Schreibweise: „$x \equiv y \mod m$“ für $(x, y) \in R_{\text{MOD}_m}$.
- Die Ordnungsrelation $R_{\leq} = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ auf $\mathbb{R}$.

Operationen auf Relationen

- Die **Komposition** $S \circ R \subseteq X \times Z$ von Relationen $R \subseteq X \times Y$ und $S \subseteq Y \times Z$:

$$S \circ R = \{(x, z) \mid \exists y : (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$

- Die **Umkehrungrelation** $R^{-1} \subseteq Y \times X$ einer Relationen $R \subseteq X \times Y$:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

- Es sei $R \subseteq X \times Y$. Dann bezeichne für alle $x \in X$ und $y \in Y$:

$$R(x) = \{y' \mid (x, y') \in R\} \subseteq Y,$$

  und

$$R^{-1}(y) = \{x' \mid (x', y) \in R\} \subseteq X.$$

Operationen auf Relationen - Beispiele

Seien

- $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$, $Z = \{6, 7\}$,
- $R = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \subseteq X \times Y$,
- $S = \{(4, 6), (5, 7)\} \subseteq Y \times Z$.

Dann gilt:

- $S \circ R = \{(1, 6), (2, 6)\}$,
- $R^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (4, 2)\} = \{(3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$,
- $R(1) = \{4\}$, $R(2) = \{3, 4\}$,
- $R^{-1}(3) = \{2\}$, $R^{-1}(4) = \{1, 2\}$, $R^{-1}(5) = \emptyset$.