Formale Grundlagen der Informatik

Herbstsemester 2020

Prof. Dr. Matthias Krause
Dr. Matthias Hamann

Aussagen

(Stand: 11.08.2020)

Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Universität Mannheim

Aussagen

Wissen, eine informale Annäherung

- **Menschen** agieren auf Grundlage von Wissen, das sie sich vorher angeeignet haben.
- **Computer** agieren (d. h., führen Algorithmen aus) auf der Basis von „Wissen“, das ihnen vorher eingegeben und in passenden Datenstrukturen angelegt wurde.
- Ein Grundanliegen der Informatik ist Formalisierung von Wissen und des formal korrekten Schließens aus gegebenem Wissen (künstliche Intelligenz, Logik).
- Wissen vermittelt sich durch Sprache, d. h., ein Ausgangspunkt für die Schaffung künstlicher Intelligenz ist die strukturelle Analyse von Sprache.

Aussagen und Wissen

- Sprache besteht aus Sätzen.
- **Aussagen** sind Sätze, denen man einen der Wahrheitswerte 1 (*wahr*, *true*) oder 0 (*falsch*, *false*) zuordnen kann.
- **Wissen** über einen bestimmten Kontext ist eine Menge von Aussagen, die im gegebenen Kontext wahr sind.
- **Aussagen** können atomar sein (*Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.*) oder zusammengesetzt sein, d. h. eine aussagenlogische Struktur besitzen (*Wenn es regnet, sind die Dächer nass.*).
- **Atomare Aussagen** können konstant sein („*Ein Meter hat 100 Zentimeter.*“ ist wahr, „*Ein Meter hat 150 Zentimeter.*“ ist falsch.) oder variable sein („*Es regnet.*“ kann je nach Zeit und Ort wahr oder falsch sein.)

Aussagen und Logische Verknüpfungsoperationen

Aus Aussagen A und B können mittels der folgenden logische Verknüpfungsoperationen neue Aussagen gebildet werden:

- **Verneinung:** Aussage „Nicht A“ (formal $\neg A$). Die Aussage $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.
- **Logisches UND:** „A und B“ (formal $A \wedge B$). Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.
- **Logisches ODER:** „A oder B“ (formal $A \vee B$). Die Aussage $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr ist.
- **Logische Implikation:** „Aus A folgt B.“ bzw. „Wenn A, dann B.“ (formal $A \rightarrow B$). Die Aussage $A \rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist oder wenn A und B wahr sind, d. h., wenn aus der Wahrheit von A die Wahrheit von B folgt.

Logische Verknüpfungsoperationen (Fortsetzung)

- **Logische Äquivalenz:** „A genau dann, wenn B." (formal $A \leftrightarrow B$). Die Aussage $A \leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.
- **Exklusives ODER:** (formal $A \oplus B$) Die Aussage $A \oplus B$ ist genau dann wahr, wenn entweder A wahr ist oder B, d. h., wenn A und B unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

Zusammengesetzte Aussagen und aussagenlog. Formeln

- **Zusammengesetzte Aussagen** sind Aussagen, die aus Teilaussagen bestehen, welche mittels logischer Verknüpfungsoperationen verbunden sind.
- Die aussagenlogische Struktur von zusammengesetzten Aussagen wird durch **aussagenlogische Formeln** beschrieben, bei denen die Teilaussagen durch aussagenlogische Variablen oder Konstanten identifiziert werden (Beispiel: Die Struktur von „*Wenn es regnet, sind die Dächer nass.*“ ist $R \to N$.).
- Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage hängt von den Wahrheitswerten der Teilaussagen gemäß der Definition der verwendeten Verknüpfungsoperationen ab.
- Dieser Zusammenhang wird durch die **Wahrheitstafel** der die Struktur einer Aussage beschreibenden aussagenlogischen Formel formalisiert.

Wahrheitstafeln

Negation

A	$\neg A$
0	1
1	0

Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikation

A	B	$A \rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Äquivalenz vs. Entweder-Oder

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Beispiel Wahrheitstafeln

A	B	C	$A \vee \neg B$	$(A \wedge B) \vee C$	$(A \vee \neg B) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Strukturelle Äquivalenz von Aussagen

Definition 1

Zwei zusammengesetze Aussagen heißen äquivalent, falls sie über den gleichen Teilaussagen definiert sind und identische Wahrheitstafeln aufweisen.

- Doppelte Verneinung: $\neg(\neg(F))$ ist äquivalent zu F.
- Widerspruch: $F \wedge (\neg F)$ ist äquivalent zu 0.
- Trivialaussage: $F \vee (\neg F)$ ist äquivalent zu 1.
- DeMorgansche Regeln: $\neg(F \vee G)$ ist äquivalent zu $(\neg F) \wedge (\neg G)$ und $\neg(F \wedge G)$ ist äquivalent zu $(\neg F) \vee (\neg G)$
- Kontraposition: $F \rightarrow G$ ist äquivalent zu $(\neg G) \rightarrow (\neg F)$ und zu $(\neg F) \vee G$.
- Beweis Hin- und Rückrichtung: $F \leftrightarrow G$ ist äquivalent zu $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$.

Definition 2

Zusammengesetzte Aussagen heißen Tautologien, falls diese aufgrund ihrer aussagenlogischen Struktur immer wahr sind, d. h., die ihnen zugrundeliegende aussagenlogische Formel äquivalent zu 1 ist.

- *Es regnet oder es regnet nicht.* ($R \vee (\neg R)$ ist äquivalent zu 1.)
- *Kräht der Hahn auf dem Mist, wird das Wetter anders oder es bleibt wie es ist.* ($H \to (W \vee (\neg W))$ ist äquivalent zu 1, da $W \vee (\neg W)$ äquivalent zu 1 ist.)

Definition 3

Zusammengesetzte Aussagen heißen widersprüchlich, falls diese aufgrund ihrer aussagenlogischen Struktur immer falsch sind, d. h., die ihnen zugrundeliegende aussagenlogische Formel äquivalent zu 0 ist.

- $R \wedge (\neg R)$ ist äquivalent zu 0.

Kontextbezogene Wahrheit zusammengesetzter Aussagen

- **Erinnerung:** Eine Wissensbasis über einen gegebenen Kontext ist eine Menge von Aussagen, die im gegebenen Kontext wahr sind.
- Es sei F eine zusammengesetzte Aussage über den Teilaussagen $A_1, \ldots, A_n$. Dass F im gegebenen Kontext wahr ist, bedeutet, dass alle Konstellationen von Wahrheitswerten von $A_1, \ldots, A_n$, die F falsch machen, im gegebenen Kontext nicht auftreten.
- **Beispiel:** Die Wahrheit der Aussage „*Wenn es regnet, sind die Dächer nass.*“ ($R \to N$) bedeutet, dass die Konstellation $R = 1$ und $N = 0$ (d. h., es regnet und die Dächer sind trocken) im gegebenen Kontext nicht auftritt.

Feinstruktur von Aussagen: Prädikate

Definition 4

Ein Prädikat über einer Grundmenge M ist eine Aussage, deren Wahrheitswert vom Wert einer (oder mehrerer) Variable(n) über der Grundmenge M abhängt.

- Beispiel: $x \geq 5$ (Grundmenge natürliche Zahlen, einstellig, atomar)
- Beispiel: $x + y \geq 5$ (Grundmenge natürliche Zahlen, zweistellig, atomar)
- Beispiel: $(x \geq 5) \wedge (x \leq 8)$ (Grundmenge natürliche Zahlen, einstellig, zusammengesetzt)
- Mittels der aussagenlogischen Verknüpfungsoperationen können aus Teilprädikaten zusammengesetzte Prädikate konstruiert werden.

Quantoren

Definition 5

Sei $P = P(x)$ ein einstelliges Prädikat über der Grundmenge M.

- Die Aussage $\forall x(P(x))$ ist genau dann wahr, wenn $P(x)$ für alle $x \in M$ wahr ist.
- Die Aussage $\exists x(P(x))$ ist genau dann wahr, wenn $P(x)$ für mindestens ein $x \in M$ wahr ist.

Beispiele:

- Die Aussage „$\forall x \in \mathbb{N} \; : \; x \geq 0$" ist wahr.
- Die Aussage „$\forall x \in \mathbb{Z} \; : \; x \geq 0$" ist falsch.
- **ABER:** Die Aussage „$\exists x \in \mathbb{Z} \; : \; x \geq 0$" ist **wahr**.
- Die Aussage „$\exists x \in \mathbb{Z} \; : \; x \cdot 2 = 3$" ist falsch.
- Die Aussage „$\exists x \in \mathbb{Q} \; : \; x \cdot 2 = 3$" ist wahr.

Alte Klausuraufgabe

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln über $\{X_1, X_2, X_3\}$:

- $F = ((\neg X_1) \oplus X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$,
- $G = ((X_2 \oplus X_3) \oplus (\neg X_2)) \vee X_1$,
- $H = (F \to G) \leftrightarrow (\neg((\neg F) \vee G))$.

Füllen Sie die folgende Wahrheitstabelle vollständig aus.

X_1	X_2	X_3	$(\neg X_1) \oplus X_3$	$X_2 \wedge X_3$	$(X_2 \oplus X_3) \oplus (\neg X_2)$	F	G	H
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0