# Theoretische Informatik

## FSS 2020 - Tutorium #6

Alexander Moch

20. Mai 2020

# Aufgabe 6.1

# Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße $(n, k)$-Formel $(1 \leq k \leq n)$, falls alle Klauseln genau $k$ Literale enthalten.

**a)** Wie viele Klauseln muss eine nichterfüllbare $(n, k)$-Formel mindestens haben?

**b)** Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

# Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_5)$$

- Eine Klausel (1) ist genau dann 0, wenn

$$\begin{aligned} & L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_k = 0 && (1) \\ \iff & \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \cdots \wedge \neg L_k = 1. && (2) \end{aligned}$$

- Es werden alle Eingaben auf 0 gesetzt, für welche (2) gilt.

Wie viele Eingaben gibt es, für die (2) gilt?

# Aufgabe 6.1

Wie viele Eingaben gibt es, für die gilt:

$$\neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \cdots \wedge \neg L_k = 1?$$

- $k$ Variablen müssen exakt gewählt werden.
  $\Longrightarrow$ Es gibt genau 1 Möglichkeit.

- Die restlichen $n - k$ Variablen können sind beliebig.
  $\Longrightarrow$ Es gibt genau $2^{n-k}$ Möglichkeiten.

Es gibt $2^{n-k}$ Eingaben, welche ein $(n, k)$-Klausel auf 0 setzen.

# Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3) \land (\neg X_1 \lor \neg X_2 \lor X_4) \land (X_4 \lor \neg X_5)$$

- Alle Belegungen mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und $X_3 = 1$ setzen die erste Klausel auf 0...
- ... und damit auch die ganze Formel.
- Die Werte für $X_4$ und $X_5$ sind dabei beliebig.

# Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße $(n, k)$-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau $k$ Literale enthalten.

**a)** Wie viele Klauseln muss eine nichterfüllbare $(n, k)$-Formel mindestens haben?

- Es gibt $2^n$ mögliche Eingaben.
- $2^{n-k}$ werden von einer $(n, k)$-Klausel auf 0 gesetzt.

$\frac{2^n}{2^{n-k}} = 2^k$ $(n, k)$-Klauseln sind nötig.

# Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße $(n, k)$-Formel $(1 \leq k \leq n)$, falls alle Klauseln genau $k$ Literale enthalten.

**b)** Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

- Es gibt für $k$ Variablen $2^k$ mögliche Belegungen.
- $2^k$ $(n, k)$-Klauseln sind nötig, damit die Formel nicht erfüllbar ist.

Genau das lässt sich ausnutzen.

# Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße $(n, k)$-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau $k$ Literale enthalten.

**b)** Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

$(4, 2)$-Formel:

$$(X_1 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee X_4)$$
$$\wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_4)$$

$(5, 3)$-Formel:

$$(X_1 \vee X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_1 \vee X_4 \vee X_5)$$
$$\wedge (X_1 \vee X_4 \vee \neg X_5) \wedge (\neg X_1 \vee X_4 \vee \neg X_5)$$
$$\wedge (X_1 \vee \neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_4 \vee X_5)$$
$$\wedge (X_1 \vee \neg X_4 \vee \neg X_5) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_4 \vee \neg X_5)$$

# Aufgabe 6.2

# Aufgabe 6.2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

**a)**

$$F = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3) \\ \wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$$

**b)**

$$G = (X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \\ \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \wedge (X_3 \vee X_1) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

# Aufgabe 6.2

**a)**

$$F = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3)$$
$$\wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$$

- Wir beobachten, dass $X_3$ nicht in $F$ vorkommt, und wählen daher $X_3 = 0$.
- $F|_{X_3=0} = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$
- $\Rightarrow$ Nun kommen in allen Klauseln positive Literale vor.
- $\Rightarrow (1, 1, 0, 1, 1)$ erfüllt $F$.

# Aufgabe 6.2

**b)**

$$\begin{aligned} G = &(X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \\ &\wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \wedge (X_3 \vee X_1) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2) \end{aligned}$$

- Wir beobachten, dass $(X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \equiv \neg X_2$ gilt, und wählen daher $X_2 = 0$.
- $G|_{X_2=0} = X_1 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_3 \vee X_1) \Rightarrow$ Wir wählen $X_1 = 1$.
- $G|_{X_1=1,X_2=0} = \neg X_3$. $\Rightarrow$ Wir wählen $X_3 = 0$.
- $\Rightarrow (1, 0, 0)$ erfüllt $G$.

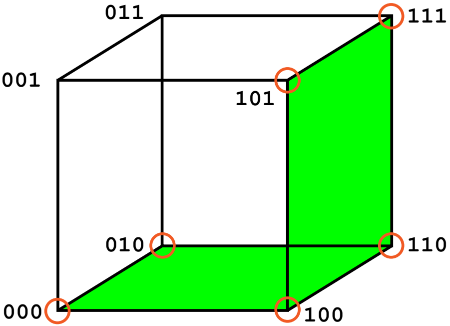
# Aufgabe 6.3

# Aufgabe 6.3

Man bestimme die Mengen aller Primklauseln und jeweils eine minimale CNF-Formel für folgende Boolsche Funktionen $f, g : \{0,1\}^3 \longrightarrow \{0,1\}$.

| $x = (x_1, x_2, x_3)$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $(0,0,0)$ | 1 | 0 |
| $(0,0,1)$ | 0 | 1 |
| $(0,1,0)$ | 1 | 1 |
| $(0,1,1)$ | 0 | 0 |
| $(1,0,0)$ | 1 | 1 |
| $(1,0,1)$ | 1 | 0 |
| $(1,1,0)$ | 1 | 0 |
| $(1,1,1)$ | 1 | 1 |

# Aufgabe 6.3

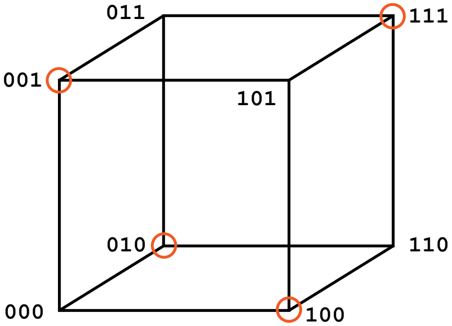



$$\mathrm{PC}(f) = \{x_1 \vee \overline{x}_3\}$$

Minimale CNF-Formel für $f$:

$x_1 \vee \overline{x}_3 \quad (= (x_1 \vee \overline{x}_3))$

# Aufgabe 6.3




$$\mathrm{PC}(g) = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3,\; x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3,\; \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3,\; \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\}$$

Minimale CNF-Formel für $g$:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$$

# Aufgabe 6.4

# Aufgabe 6.4

Man gebe für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, eine Funktion $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ an, für die alle Primklauseln die Länge $n$ haben.

Die Bedingung erfüllen $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ (= PARITY) und $\neg f$, da für alle $b, b' \in \{0,1\}^n$ mit Hamming-Abstand $dist(b, b') = 1$ gilt:

$$f(b) \neq f(b').$$

# Aufgabe 6.5

# Aufgabe 6.5

Sei $C = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine 2-CNF-Formel, die nur aus 2-Klauseln besteht, $C_j = L_{j,1} \vee L_{j,2}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.

- Ersetze alle $C_j$ durch die äquivalente Formel $(\neg L_{j,1} \to L_{j,2}) \wedge (\neg L_{j,2} \to L_{j,1})$.
- Definiere Graphen $G = (V, E)$ mit
  - $V = \{X_1, \neg X_1, ..., X_n, \neg X_n\}$
  - $E = \{(\neg L_{j,1}, L_{j,2}, (\neg L_{j,2}, L_{j,1})\}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.
- Belegung $b \in \{0, 1\}^n$ erfüllt $C$ genau dann, wenn es in $G$ bezüglich der Markierung durch $b$ keine $(1, 0)$-Kanten gibt.

# Aufgabe 6.5

**Lemma 1**

*Für $b \in \{0,1\}^n$ gelte $C(b) = 1$. Dann gilt für alle starken Zusammenhangskomponenten $V_p \in SCC(G)$, dass $b$ entweder alle Literale in $V_p$ erfüllt oder gar keines.*

**Lemma 2**

*Es existiert ein Index $i$, $1 \leq i \leq n$, und eine starke Zusammenhangskomponente $V_p \in SCC(G)$, sodass $X_i \in V_p$ und $\neg X_i \in V_p$. Dann gilt $C \notin SAT$.*

**Lemma 3**

*Für alle $i$, $1 \leq i \leq n$, und alle starken Zusammenhangskomponenten $V_p \in SCC(G)$, gelte dass aus $X_i \in V_p$ folgt, dass $\neg X_i \notin V_p$. Dann gilt $C \in SAT$.*

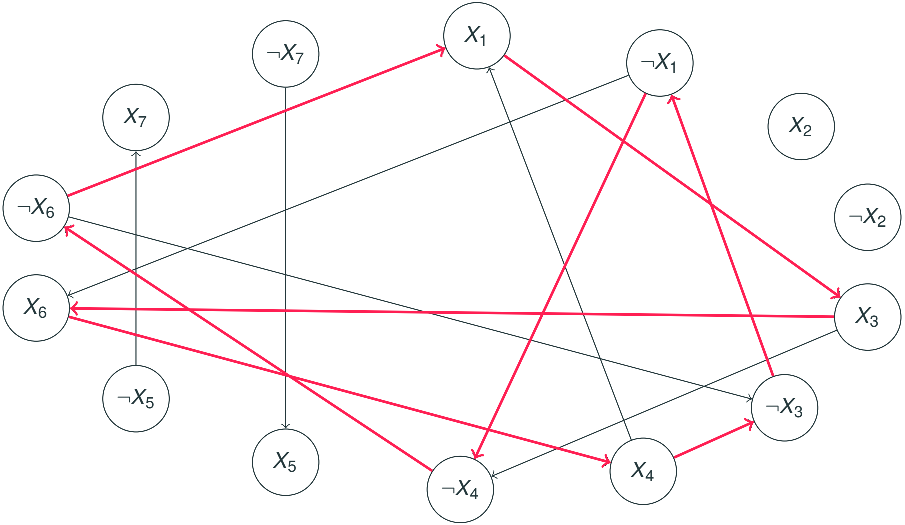
# Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel $C$ über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7)$$
$$\wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3)\,.$$

| | |
|---|---|
| $(\neg X_1 \vee X_3)$ | $(X_1 \rightarrow X_3) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_1)$ |
| $(X_1 \vee \neg X_4)$ | $(\neg X_1 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_1)$ |
| $(X_4 \vee \neg X_6)$ | $(\neg X_4 \rightarrow \neg X_6) \wedge (X_6 \rightarrow X_4)$ |
| $(X_5 \vee X_7)$ | $(\neg X_5 \rightarrow X_7) \wedge (\neg X_7 \rightarrow X_5)$ |
| $(X_6 \vee X_1)$ | $(\neg X_6 \rightarrow X_1) \wedge (\neg X_1 \rightarrow X_6)$ |
| $(\neg X_3 \vee \neg X_4)$ | $(X_3 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_4 \rightarrow \neg X_3)$ |
| $(X_6 \vee \neg X_3)$ | $(\neg X_6 \rightarrow \neg X_3) \wedge (X_3 \rightarrow X_6)$ |

# Aufgabe 6.5



# Aufgabe 6.5

Starke Zusammenhangskomponenten:

$$\{X_1, \neg X_1, X_3, \neg X_3, X_4, \neg X_4, X_6, \neg X_6\},$$
$$\{X_2\}, \{\neg X_2\}, \{X_5\}, \{\neg X_5\}, \{X_7\}, \{\neg X_7\}.$$

$$\Rightarrow C \notin \mathrm{SAT}$$

# Aufgabe 6.6

# Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in $n$ hat.

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

# Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in $n$ hat.

Seien $L_1$, $L_2$ und $L_3$ drei verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 2-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2) \wedge (\neg L_1 \vee L_3)$$

besteht aus höchstens 2 Literalen

$$(L_2 \vee L_3).$$

Die Anzahl der 1- und 2-Klauseln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist durch $2n + \frac{2n(2n-2)}{2} = 2n^2$ nach oben beschränkt.

# Aufgabe 6.6

Die Anzahl der 1- und 2-Klauseln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist durch $2n + \frac{2n(2n-2)}{2} = 2n^2$* nach oben beschränkt.

*Es gibt $2n$ mögliche Literale. Wenn in einer Klausel, keine Literale doppelt vorkommen, $(L_1 \vee L_1) = L_1$, oder kein Literal und seine Negation vorkommen, $(L_1 \vee \neg L_1) = 1$, können die $2n$ Literale mit $2n - 2$ Literalen kombiniert werden, d.h. $2n \cdot (2n - 2)$.

Da $(L_1 \vee L_2)$ und $(L_2 \vee L_1)$ äquivalent sind, ergibt sich als Gesamtanzahl an 2-Klauseln

$$\frac{2n \cdot (2n-2)}{2}.$$

Zusammen mit der Anzahl an 1-Klauseln (Literalen), $2n$, ergibt sich $2n + \frac{2n(2n-2)}{2} = 2n^2$.

# Aufgabe 6.6

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

Seien $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ fünf verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 3-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2 \vee L_3) \wedge (\neg L_1 \vee L_4 \vee L_5)$$

kann auch eine 4-Klausel sein

$$(L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee L_5).$$

Geht man davon aus, dass innerhalb derselben Klausel kein Literal mehrfach oder zusätzlich in negierter Form auftritt, existieren $2^k \cdot \binom{n}{k}$ verschiedene $k$-Klauseln über $n$ Variablen.

# Aufgabe 6.7

# Aufgabe 6.7

**Definition 4**

Eine Klausel heißt Hornklausel, falls sie höchstens ein unnegiertes Literal enthält. Eine CNF-Formel heißt Hornformel, falls sie nur aus Hornklauseln besteht.

- Hornklauseln haben die Gestalt $X_i \equiv 1 \to X_i$ oder, für $r \geq 1$,
  - $\neg X_{i_1} \vee \ldots \vee \neg X_{i_r} \vee X_{i_{r+1}} \equiv X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_r} \to X_{i_{r+1}}$
  - $\neg X_{i_1} \vee \ldots \vee \neg X_{i_r} \equiv X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_r} \to 0$

Hornformeln ohne unnegierte 1-Klauseln der Gestalt $1 \to X_i$ sind immer erfüllbar.

# Aufgabe 6.7

Angenommen, wir haben Apparaturen zur Durchführung folgender chemischer Reaktionen:

$$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$$
$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$
$$H_2O + CO_2 \rightarrow H_2CO_3$$

Ferner haben wir folgende Grundstoffe: $MgO, H_2, O_2, C$.

Man beweise unter Verwendung des Hornformel-Algorithmus, dass es nun möglich ist, $H_2CO_3$ herzustellen.

# Aufgabe 6.7

$$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$$
$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$
$$H_2O + CO_2 \rightarrow H_2CO_3$$

Grundstoffe: $MgO, H_2, O_2, C$

$X_1 \hat{=} MgO$ $\quad$ $X_5 \hat{=} Mg$

$X_2 \hat{=} H_2$ $\quad$ $X_6 \hat{=} H_2O$

$X_3 \hat{=} O_2$ $\quad$ $X_7 \hat{=} CO_2$

$X_4 \hat{=} C$ $\quad$ $X_8 \hat{=} H_2CO_3$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned} C = {} & X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_6) \\ & \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8 \end{aligned}$$

ist nicht erfüllbar.

# Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in $C$ enthaltenen 1-Klausel $X_1$:

$$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Analog erhalten wir:

$$C|_{X_1=1,X_2=1} = X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1} = X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1} = X_5 \wedge X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1} = X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1,X_6=1} = X_7 \wedge (\neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1,X_6=1,X_7=1} = X_8 \wedge \neg X_8$$

$$\Rightarrow C \notin \text{SAT}$$

# Aufgabe 6.8a

# Aufgabe 6.8a

**Definition 5**

Es sei $C$ eine CNF-Formel über $X_1, ..., X_n$. Eine Klausel $R$ heißt Resolvent der Klauseln $K$ und $N$, falls eine Variable $X$ existiert mit $K = X \vee K'$ und $N = \neg X \vee N'$ und $R = K' \vee N'$. R heißt Resolvent einer CNF-Formel $C$, falls $R$ Resolvent zweier Klauseln von $C$ ist.

**Lemma 6**

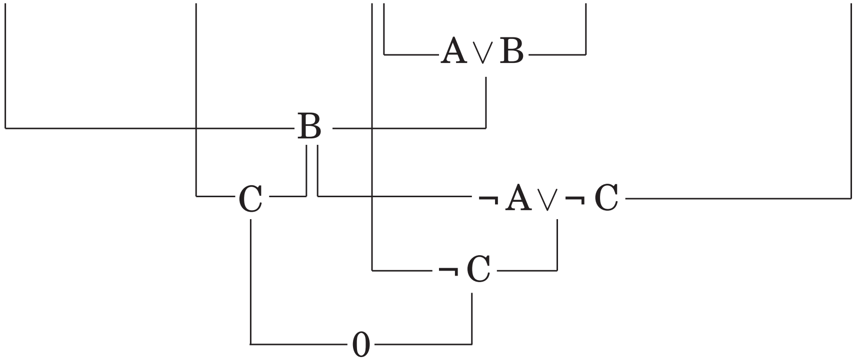
*Ist $R$ Resolvent von $C$, so ist $R$ Klausel von $C$, d.h. $C \wedge R \equiv C$.*

# Aufgabe 6.8a

Man zeige mit Hilfe des Resolutionsalgorithmus, dass

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \notin \mathrm{SAT}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$



# Aufgabe 6.8b

Man zeige mit Hilfe des Resolutionsalgorithmus, dass

$$(B \vee C \vee \neg D) \wedge (B \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg B)$$

# Aufgabe 6.8b

$$(B \lor C \lor \neg D) \land (B \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land (\neg B)$$

$$B \lor \neg D$$

$$B$$

$$0$$