Theoretische Informatik

FSS 2020 - Tutorium #6

Alexander Moch

20. Mai 2020

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

a) Wie viele Klauseln muss eine nichterfüllbare (n, k)-Formel mindestens haben?

b) Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_5)$$

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_5)$$

- Eine Klausel (1) ist genau dann 0, wenn

$$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_k = 0 \tag{1}$$

$$\iff \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \cdots \wedge \neg L_k = 1. \tag{2}$$

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3) \land (\neg X_1 \lor \neg X_2 \lor X_4) \land (X_4 \lor \neg X_5)$$

- Eine Klausel (1) ist genau dann 0, wenn

$$\begin{aligned} & L_1 \lor L_2 \lor \cdots \lor L_k = 0 && (1) \\ \iff & \neg L_1 \land \neg L_2 \land \cdots \land \neg L_k = 1. && (2) \end{aligned}$$

- Es werden alle Eingaben auf 0 gesetzt, für welche (2) gilt.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3) \land (\neg X_1 \lor \neg X_2 \lor X_4) \land (X_4 \lor \neg X_5)$$

- Eine Klausel (1) ist genau dann 0, wenn

$$L_1 \lor L_2 \lor \cdots \lor L_k = 0 \tag{1}$$

$$\iff \neg L_1 \land \neg L_2 \land \cdots \land \neg L_k = 1. \tag{2}$$

- Es werden alle Eingaben auf 0 gesetzt, für welche (2) gilt.

Wie viele Eingaben gibt es, für die (2) gilt?

Aufgabe 6.1

Wie viele Eingaben gibt es, für die gilt:

$$\neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \cdots \wedge \neg L_k = 1?$$

Aufgabe 6.1

Wie viele Eingaben gibt es, für die gilt:

$$\neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \dots \wedge \neg L_k = 1?$$

- k Variablen müssen exakt gewählt werden.
  $\Longrightarrow$ Es gibt genau 1 Möglichkeit.

Aufgabe 6.1

Wie viele Eingaben gibt es, für die gilt:

$$\neg L_1 \land \neg L_2 \land \cdots \land \neg L_k = 1?$$

- k Variablen müssen exakt gewählt werden.
  $\Longrightarrow$ Es gibt genau 1 Möglichkeit.

- Die restlichen $n - k$ Variablen können sind beliebig.
  $\Longrightarrow$ Es gibt genau 2^{n-k} Möglichkeiten.

Aufgabe 6.1

Wie viele Eingaben gibt es, für die gilt:

$$\neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \cdots \wedge \neg L_k = 1?$$

- k Variablen müssen exakt gewählt werden.
  $\implies$ Es gibt genau 1 Möglichkeit.
- Die restlichen $n - k$ Variablen können sind beliebig.
  $\implies$ Es gibt genau 2^{n-k} Möglichkeiten.

Es gibt 2^{n-k} Eingaben, welche ein (n, k)-Klausel auf 0 setzen.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3) \land (\neg X_1 \lor \neg X_2 \lor X_4) \land (X_4 \lor \neg X_5)$$

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_5)$$

- Alle Belegungen mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und $X_3 = 1$ setzen die erste Klausel auf 0...

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_5)$$

- Alle Belegungen mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und $X_3 = 1$ setzen die erste Klausel auf 0...
- ... und damit auch die ganze Formel.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel könnte wie folgt aussehen:

$$(X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3) \land (\neg X_1 \lor \neg X_2 \lor X_4) \land (X_4 \lor \neg X_5)$$

- Alle Belegungen mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und $X_3 = 1$ setzen die erste Klausel auf 0...
- ... und damit auch die ganze Formel.
- Die Werte für X_4 und X_5 sind dabei beliebig.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

a) Wie viele Klauseln muss eine nichterfüllbare (n, k)-Formel mindestens haben?

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel $(1 \leq k \leq n)$, falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

a) Wie viele Klauseln muss eine nichterfüllbare (n, k)-Formel mindestens haben?

- Es gibt 2^n mögliche Eingaben.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

a) Wie viele Klauseln muss eine nichterfüllbare (n, k)-Formel mindestens haben?

- Es gibt 2^n mögliche Eingaben.
- 2^{n-k} werden von einer (n, k)-Klausel auf 0 gesetzt.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

a) Wie viele Klauseln muss eine nichterfüllbare (n, k)-Formel mindestens haben?

- Es gibt 2^n mögliche Eingaben.
- 2^{n-k} werden von einer (n, k)-Klausel auf 0 gesetzt.

$\frac{2^n}{2^{n-k}} = 2^k$ (n, k)-Klauseln sind nötig.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel $(1 \leq k \leq n)$, falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

b) Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel $(1 \leq k \leq n)$, falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

b) Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

- Es gibt für k Variablen 2^k mögliche Belegungen.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

b) Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

- Es gibt für k Variablen 2^k mögliche Belegungen.
- 2^k (n, k)-Klauseln sind nötig, damit die Formel nicht erfüllbar ist.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel $(1 \leq k \leq n)$, falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

b) Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

- Es gibt für k Variablen 2^k mögliche Belegungen.
- 2^k (n, k)-Klauseln sind nötig, damit die Formel nicht erfüllbar ist.

Genau das lässt sich ausnutzen.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

b) Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

Aufgabe 6.1

Eine CNF-Formel über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ heiße (n, k)-Formel ($1 \leq k \leq n$), falls alle Klauseln genau k Literale enthalten.

b) Man konstruiere nichterfüllbare $(4, 2)$- und $(5, 3)$-Formeln mit minimaler Anzahl an Klauseln.

$(4, 2)$-Formel:

$$
\begin{aligned}
&(X_1 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee X_4) \\
\wedge &(X_1 \vee \neg X_4) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_4)
\end{aligned}
$$

$(5, 3)$-Formel:

$$
\begin{aligned}
&(X_1 \vee X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_1 \vee X_4 \vee X_5) \\
\wedge &(X_1 \vee X_4 \vee \neg X_5) \wedge (\neg X_1 \vee X_4 \vee \neg X_5) \\
\wedge &(X_1 \vee \neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_4 \vee X_5) \\
\wedge &(X_1 \vee \neg X_4 \vee \neg X_5) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_4 \vee \neg X_5)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.2

Aufgabe 6.2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

a)

$$F = (\neg X_1 \lor X_2) \land (\neg X_4 \lor X_5) \land (\neg X_2 \lor \neg X_3) \land (\neg X_5 \lor X_1) \land (\neg X_3 \lor \neg X_1) \land (X_1 \lor X_4)$$

b)

$$G = (X_1 \lor X_2) \land (X_3 \lor \neg X_2) \land (\neg X_3 \lor \neg X_1) \land (\neg X_3 \lor \neg X_2) \land (X_3 \lor X_1) \land (\neg X_1 \lor \neg X_2)$$

Aufgabe 6.2

a)

$$F = (\neg X_1 \lor X_2) \land (\neg X_4 \lor X_5) \land (\neg X_2 \lor \neg X_3) \\ \land (\neg X_5 \lor X_1) \land (\neg X_3 \lor \neg X_1) \land (X_1 \lor X_4)$$

Aufgabe 6.2

a)

$$F = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3)$$
$$\wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$$

- Wir beobachten, dass X_3 nicht in F vorkommt, und wählen daher $X_3 = 0$.

Aufgabe 6.2

a)

$$F = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3)$$
$$\wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$$

- Wir beobachten, dass X_3 nicht in F vorkommt, und wählen daher $X_3 = 0$.
- $F|_{X_3=0} = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$

Aufgabe 6.2

a)

$$F = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3)$$
$$\wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$$

- Wir beobachten, dass X_3 nicht in F vorkommt, und wählen daher $X_3 = 0$.
- $F|_{X_3=0} = (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_4 \vee X_5) \wedge (\neg X_5 \vee X_1) \wedge (X_1 \vee X_4)$
- $\Rightarrow$ Nun kommen in allen Klauseln positive Literale vor.

Aufgabe 6.2

a)

$$F = (\neg X_1 \lor X_2) \land (\neg X_4 \lor X_5) \land (\neg X_2 \lor \neg X_3)$$
$$\land (\neg X_5 \lor X_1) \land (\neg X_3 \lor \neg X_1) \land (X_1 \lor X_4)$$

- Wir beobachten, dass X_3 nicht in F vorkommt, und wählen daher $X_3 = 0$.
- $F|_{X_3=0} = (\neg X_1 \lor X_2) \land (\neg X_4 \lor X_5) \land (\neg X_5 \lor X_1) \land (X_1 \lor X_4)$
- $\Rightarrow$ Nun kommen in allen Klauseln positive Literale vor.
- $\Rightarrow$ $(1, 1, 0, 1, 1)$ erfüllt F.

Aufgabe 6.2

b)

$$G = (X_1 \lor X_2) \land (X_3 \lor \neg X_2) \land (\neg X_3 \lor \neg X_1)$$
$$\land (\neg X_3 \lor \neg X_2) \land (X_3 \lor X_1) \land (\neg X_1 \lor \neg X_2)$$

Aufgabe 6.2

b)

$$G = (X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1)$$
$$\wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \wedge (X_3 \vee X_1) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

- Wir beobachten, dass $(X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \equiv \neg X_2$ gilt, und wählen daher $X_2 = 0$.

Aufgabe 6.2

b)

$$G = (X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1)$$
$$\wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \wedge (X_3 \vee X_1) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

- Wir beobachten, dass $(X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \equiv \neg X_2$ gilt, und wählen daher $X_2 = 0$.
- $G|_{X_2=0} = X_1 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_3 \vee X_1) \Rightarrow$ Wir wählen $X_1 = 1$.

Aufgabe 6.2

b)

$$G = (X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1)$$
$$\wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \wedge (X_3 \vee X_1) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

- Wir beobachten, dass $(X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \equiv \neg X_2$ gilt, und wählen daher $X_2 = 0$.
- $G|_{X_2=0} = X_1 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_3 \vee X_1) \Rightarrow$ Wir wählen $X_1 = 1$.
- $G|_{X_1=1, X_2=0} = \neg X_3. \Rightarrow$ Wir wählen $X_3 = 0$.

Aufgabe 6.2

b)

$$G = (X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \\ \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \wedge (X_3 \vee X_1) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

- Wir beobachten, dass $(X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2) \equiv \neg X_2$ gilt, und wählen daher $X_2 = 0$.
- $G|_{X_2=0} = X_1 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_1) \wedge (X_3 \vee X_1) \Rightarrow$ Wir wählen $X_1 = 1$.
- $G|_{X_1=1, X_2=0} = \neg X_3$. $\Rightarrow$ Wir wählen $X_3 = 0$.
- $\Rightarrow (1, 0, 0)$ erfüllt G.

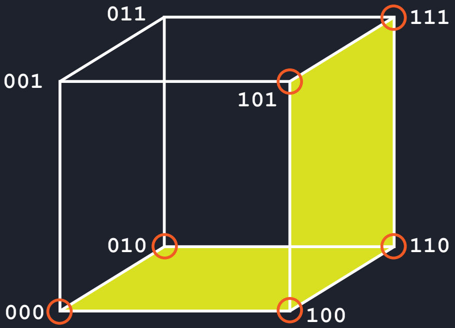
Aufgabe 6.3

Aufgabe 6.3

Man bestimme die Mengen aller Primklauseln und jeweils eine minimale CNF-Formel für folgende Boolsche Funktionen $f, g : \{0,1\}^3 \longrightarrow \{0,1\}$.

$x = (x_1, x_2, x_3)$	$f(x)$	$g(x)$
$(0,0,0)$	1	0
$(0,0,1)$	0	1
$(0,1,0)$	1	1
$(0,1,1)$	0	0
$(1,0,0)$	1	1
$(1,0,1)$	1	0
$(1,1,0)$	1	0
$(1,1,1)$	1	1

Aufgabe 6.3

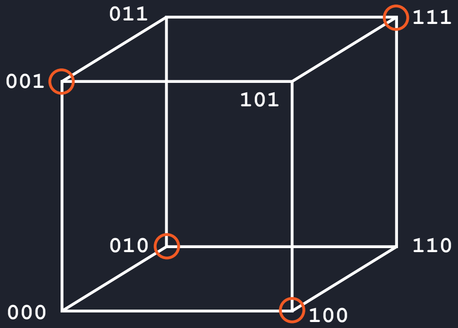


$$\mathrm{PC}(f) = \{x_1 \vee \overline{x}_3\}$$

Minimale CNF-Formel für f:

$x_1 \vee \overline{x}_3 \quad (= (x_1 \vee \overline{x}_3))$

Aufgabe 6.3



$$\mathrm{PC}(g) = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3,\; x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3,\; \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3,\; \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\}$$

Minimale CNF-Formel für g:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$$

Aufgabe 6.4

Aufgabe 6.4

Man gebe für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, eine Funktion $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ an, für die alle Primklauseln die Länge n haben.

Die Bedingung erfüllen $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ (= PARITY) und $\neg f$, da für alle $b, b' \in \{0,1\}^n$ mit Hamming-Abstand $dist(b, b') = 1$ gilt:

$$f(b) \neq f(b').$$

Aufgabe 6.5

Aufgabe 6.5

Sei $C = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine 2-CNF-Formel, die nur aus 2-Klauseln besteht, $C_j = L_{j,1} \vee L_{j,2}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.

Aufgabe 6.5

Sei $C = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine 2-CNF-Formel, die nur aus 2-Klauseln besteht, $C_j = L_{j,1} \vee L_{j,2}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.

- Ersetze alle C_j durch die äquivalente Formel $(\neg L_{j,1} \to L_{j,2}) \wedge (\neg L_{j,2} \to L_{j,1})$.
- Definiere Graphen $G = (V, E)$ mit

Aufgabe 6.5

Sei $C = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine 2-CNF-Formel, die nur aus 2-Klauseln besteht, $C_j = L_{j,1} \vee L_{j,2}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.

- Ersetze alle C_j durch die äquivalente Formel $(\neg L_{j,1} \rightarrow L_{j,2}) \wedge (\neg L_{j,2} \rightarrow L_{j,1})$.
- Definiere Graphen $G = (V, E)$ mit
  - $V = \{X_1, \neg X_1, ..., X_n, \neg X_n\}$

Aufgabe 6.5

Sei $C = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine 2-CNF-Formel, die nur aus 2-Klauseln besteht, $C_j = L_{j,1} \vee L_{j,2}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.

- Ersetze alle C_j durch die äquivalente Formel $(\neg L_{j,1} \rightarrow L_{j,2}) \wedge (\neg L_{j,2} \rightarrow L_{j,1})$.
- Definiere Graphen $G = (V, E)$ mit
  - $V = \{X_1, \neg X_1, ..., X_n, \neg X_n\}$
  - $E = \{(\neg L_{j,1}, L_{j,2}, (\neg L_{j,2}, L_{j,1})\}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.

Aufgabe 6.5

Sei $C = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine 2-CNF-Formel, die nur aus 2-Klauseln besteht, $C_j = L_{j,1} \vee L_{j,2}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.

- Ersetze alle C_j durch die äquivalente Formel $(\neg L_{j,1} \rightarrow L_{j,2}) \wedge (\neg L_{j,2} \rightarrow L_{j,1})$.
- Definiere Graphen $G = (V, E)$ mit
    - $V = \{X_1, \neg X_1, ..., X_n, \neg X_n\}$
    - $E = \{(\neg L_{j,1}, L_{j,2}, (\neg L_{j,2}, L_{j,1})\}$ für $j \in \{1, ..., m\}$.
- Belegung $b \in \{0, 1\}^n$ erfüllt C genau dann, wenn es in G bezüglich der Markierung durch b keine $(1, 0)$-Kanten gibt.

Lemma 1

Für $b \in \{0,1\}^n$ gelte $C(b) = 1$. Dann gilt für alle starken Zusammenhangskomponenten $V_p \in SCC(G)$, dass b entweder alle Literale in V_p erfüllt oder gar keines.

Aufgabe 6.5

Lemma 1

Für $b \in \{0,1\}^n$ gelte $C(b) = 1$. Dann gilt für alle starken Zusammenhangskomponenten $V_p \in SCC(G)$, dass b entweder alle Literale in V_p erfüllt oder gar keines.

Lemma 2

Es existiert ein Index i, $1 \leq i \leq n$, und eine starke Zusammenhangskomponente $V_p \in SCC(G)$, sodass $X_i \in V_p$ und $\neg X_i \in V_p$. Dann gilt $C \notin SAT$.

Aufgabe 6.5

Lemma 1

Für $b \in \{0, 1\}^n$ gelte $C(b) = 1$. Dann gilt für alle starken Zusammenhangskomponenten $V_p \in SCC(G)$, dass b entweder alle Literale in V_p erfüllt oder gar keines.

Lemma 2

Es existiert ein Index i, $1 \leq i \leq n$, und eine starke Zusammenhangskomponente $V_p \in SCC(G)$, sodass $X_i \in V_p$ und $\neg X_i \in V_p$. Dann gilt $C \notin SAT$.

Lemma 3

Für alle i, $1 \leq i \leq n$, und alle starken Zusammenhangskomponenten $V_p \in SCC(G)$, gelte dass aus $X_i \in V_p$ folgt, dass $\neg X_i \notin V_p$. Dann gilt $C \in SAT$.

Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7) \\ \wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3)\,.$$

Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7)$$
$$\wedge\, (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3)\,.$$

$$(\neg X_1 \vee X_3) \quad \Big| \quad (X_1 \rightarrow X_3) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_1)$$

Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7) \\ \wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3)\,.$$

$(\neg X_1 \vee X_3)$	$(X_1 \rightarrow X_3) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_1)$
$(X_1 \vee \neg X_4)$	$(\neg X_1 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_1)$

Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7)$$
$$\wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3)\,.$$

$(\neg X_1 \vee X_3)$	$(X_1 \rightarrow X_3) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_1)$
$(X_1 \vee \neg X_4)$	$(\neg X_1 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_1)$
$(X_4 \vee \neg X_6)$	$(\neg X_4 \rightarrow \neg X_6) \wedge (X_6 \rightarrow X_4)$

Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \dots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7)$$
$$\wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3)\,.$$

$(\neg X_1 \vee X_3)$	$(X_1 \rightarrow X_3) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_1)$
$(X_1 \vee \neg X_4)$	$(\neg X_1 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_1)$
$(X_4 \vee \neg X_6)$	$(\neg X_4 \rightarrow \neg X_6) \wedge (X_6 \rightarrow X_4)$
$(X_5 \vee X_7)$	$(\neg X_5 \rightarrow X_7) \wedge (\neg X_7 \rightarrow X_5)$

Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7)$$
$$\wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3) .$$

$(\neg X_1 \vee X_3)$	$(X_1 \rightarrow X_3) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_1)$
$(X_1 \vee \neg X_4)$	$(\neg X_1 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_4 \rightarrow X_1)$
$(X_4 \vee \neg X_6)$	$(\neg X_4 \rightarrow \neg X_6) \wedge (X_6 \rightarrow X_4)$
$(X_5 \vee X_7)$	$(\neg X_5 \rightarrow X_7) \wedge (\neg X_7 \rightarrow X_5)$
$(X_6 \vee X_1)$	$(\neg X_6 \rightarrow X_1) \wedge (\neg X_1 \rightarrow X_6)$

Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7)$$
$$\wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3) .$$

$(\neg X_1 \vee X_3)$	$(X_1 \to X_3) \wedge (\neg X_3 \to \neg X_1)$
$(X_1 \vee \neg X_4)$	$(\neg X_1 \to \neg X_4) \wedge (X_4 \to X_1)$
$(X_4 \vee \neg X_6)$	$(\neg X_4 \to \neg X_6) \wedge (X_6 \to X_4)$
$(X_5 \vee X_7)$	$(\neg X_5 \to X_7) \wedge (\neg X_7 \to X_5)$
$(X_6 \vee X_1)$	$(\neg X_6 \to X_1) \wedge (\neg X_1 \to X_6)$
$(\neg X_3 \vee \neg X_4)$	$(X_3 \to \neg X_4) \wedge (X_4 \to \neg X_3)$

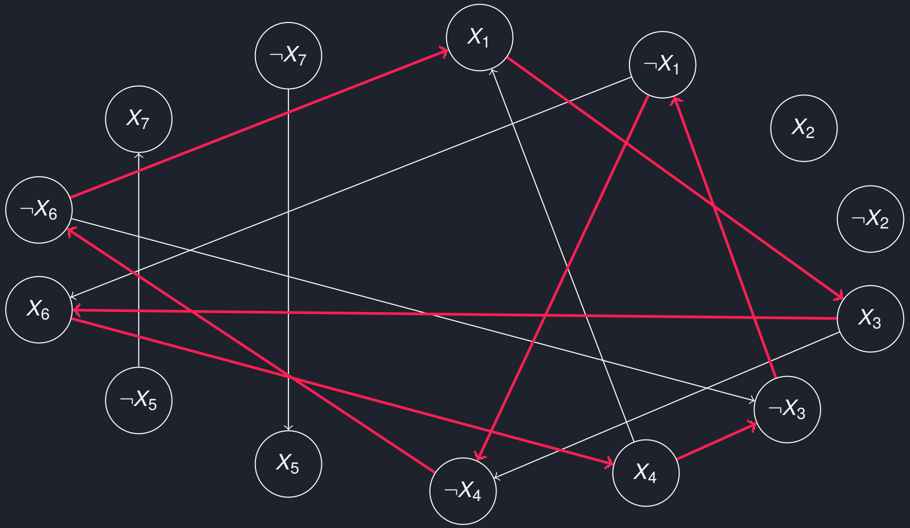
Aufgabe 6.5

Wir betrachten die 2-CNF-Formel C über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ definiert durch:

$$C = (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_6) \wedge (X_5 \vee X_7)$$
$$\wedge (X_6 \vee X_1) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_6 \vee \neg X_3) .$$

$(\neg X_1 \vee X_3)$	$(X_1 \to X_3) \wedge (\neg X_3 \to \neg X_1)$
$(X_1 \vee \neg X_4)$	$(\neg X_1 \to \neg X_4) \wedge (X_4 \to X_1)$
$(X_4 \vee \neg X_6)$	$(\neg X_4 \to \neg X_6) \wedge (X_6 \to X_4)$
$(X_5 \vee X_7)$	$(\neg X_5 \to X_7) \wedge (\neg X_7 \to X_5)$
$(X_6 \vee X_1)$	$(\neg X_6 \to X_1) \wedge (\neg X_1 \to X_6)$
$(\neg X_3 \vee \neg X_4)$	$(X_3 \to \neg X_4) \wedge (X_4 \to \neg X_3)$
$(X_6 \vee \neg X_3)$	$(\neg X_6 \to \neg X_3) \wedge (X_3 \to X_6)$

Aufgabe 6.5



Aufgabe 6.5

Starke Zusammenhangskomponenten:

$$\{X_1, \neg X_1, X_3, \neg X_3, X_4, \neg X_4, X_6, \neg X_6\},$$
$$\{X_2\}, \{\neg X_2\}, \{X_5\}, \{\neg X_5\}, \{X_7\}, \{\neg X_7\}.$$

$$\Rightarrow C \notin \text{SAT}$$

Aufgabe 6.6

Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in n hat.

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in n hat.

Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in n hat.

Seien L_1, L_2 und L_3 drei verschiedene Literale.

Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in n hat.

Seien L_1, L_2 und L_3 drei verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 2-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2) \wedge (\neg L_1 \vee L_3)$$

Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in n hat.

Seien L_1, L_2 und L_3 drei verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 2-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2) \wedge (\neg L_1 \vee L_3)$$

besteht aus höchstens 2 Literalen

$$(L_2 \vee L_3).$$

Aufgabe 6.6

a) Man zeige, dass der Resolutionsalgorithmus über 2-CNF-Formeln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ immer polynomielle Laufzeit in n hat.

Seien L_1, L_2 und L_3 drei verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 2-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2) \wedge (\neg L_1 \vee L_3)$$

besteht aus höchstens 2 Literalen

$$(L_2 \vee L_3).$$

Die Anzahl der 1- und 2-Klauseln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist durch $2n + \frac{2n(2n-2)}{2} = 2n^2$ nach oben beschränkt.

Aufgabe 6.6

Die Anzahl der 1- und 2-Klauseln über $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist durch $2n + \frac{2n(2n-2)}{2} = 2n^2$* nach oben beschränkt.

*Es gibt $2n$ mögliche Literale. Wenn in einer Klausel, keine Literale doppelt vorkommen, $(L_1 \vee L_1) = L_1$, oder kein Literal und seine Negation vorkommen, $(L_1 \vee \neg L_1) = 1$, können die $2n$ Literale mit $2n - 2$ Literalen kombiniert werden, d.h. $2n \cdot (2n - 2)$.

Da $(L_1 \vee L_2)$ und $(L_2 \vee L_1)$ äquivalent sind, ergibt sich als Gesamtanzahl an 2-Klauseln

$$\frac{2n \cdot (2n-2)}{2}.$$

Zusammen mit der Anzahl an 1-Klauseln (Literalen), $2n$, ergibt sich $2n + \frac{2n(2n-2)}{2} = 2n^2$.

Aufgabe 6.6

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

Aufgabe 6.6

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

Seien L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 fünf verschiedene Literale.

Aufgabe 6.6

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

Seien L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 fünf verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 3-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2 \vee L_3) \wedge (\neg L_1 \vee L_4 \vee L_5)$$

Aufgabe 6.6

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

Seien L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 fünf verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 3-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2 \vee L_3) \wedge (\neg L_1 \vee L_4 \vee L_5)$$

kann auch eine 4-Klausel sein

$$(L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee L_5).$$

Aufgabe 6.6

b) Warum trifft diese Aussage nicht auf 3-CNF-Formeln zu?

Seien L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 fünf verschiedene Literale.

Der Resolvent zweier 3-Klauseln

$$(L_1 \vee L_2 \vee L_3) \wedge (\neg L_1 \vee L_4 \vee L_5)$$

kann auch eine 4-Klausel sein

$$(L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee L_5).$$

Geht man davon aus, dass innerhalb derselben Klausel kein Literal mehrfach oder zusätzlich in negierter Form auftritt, existieren $2^k \cdot \binom{n}{k}$ verschiedene k-Klauseln über n Variablen.

Aufgabe 6.7

Aufgabe 6.7

Definition 4

Eine Klausel heißt Hornklausel, falls sie höchstens ein unnegiertes Literal enthält. Eine CNF-Formel heißt Hornformel, falls sie nur aus Hornklauseln besteht.

Aufgabe 6.7

Definition 4

Eine Klausel heißt Hornklausel, falls sie höchstens ein unnegiertes Literal enthält. Eine CNF-Formel heißt Hornformel, falls sie nur aus Hornklauseln besteht.

- Hornklauseln haben die Gestalt $X_i \equiv 1 \rightarrow X_i$ oder, für $r \geq 1$,

Aufgabe 6.7

Definition 4

Eine Klausel heißt Hornklausel, falls sie höchstens ein unnegiertes Literal enthält. Eine CNF-Formel heißt Hornformel, falls sie nur aus Hornklauseln besteht.

- Hornklauseln haben die Gestalt $X_i \equiv 1 \rightarrow X_i$ oder, für $r \geq 1$,
    - $\neg X_{i_1} \vee ... \vee \neg X_{i_r} \vee X_{i_{r+1}} \equiv X_{i_1} \wedge ... \wedge X_{i_r} \rightarrow X_{i_{r+1}}$

Aufgabe 6.7

Definition 4

Eine Klausel heißt Hornklausel, falls sie höchstens ein unnegiertes Literal enthält. Eine CNF-Formel heißt Hornformel, falls sie nur aus Hornklauseln besteht.

- Hornklauseln haben die Gestalt $X_i \equiv 1 \rightarrow X_i$ oder, für $r \geq 1$,
  - $\neg X_{i_1} \vee ... \vee \neg X_{i_r} \vee X_{i_{r+1}} \equiv X_{i_1} \wedge ... \wedge X_{i_r} \rightarrow X_{i_{r+1}}$
  - $\neg X_{i_1} \vee ... \vee \neg X_{i_r} \equiv X_{i_1} \wedge ... \wedge X_{i_r} \rightarrow 0$

Aufgabe 6.7

Definition 4

Eine Klausel heißt Hornklausel, falls sie höchstens ein unnegiertes Literal enthält. Eine CNF-Formel heißt Hornformel, falls sie nur aus Hornklauseln besteht.

- Hornklauseln haben die Gestalt $X_i \equiv 1 \rightarrow X_i$ oder, für $r \geq 1$,
  - $\neg X_{i_1} \vee ... \vee \neg X_{i_r} \vee X_{i_{r+1}} \equiv X_{i_1} \wedge ... \wedge X_{i_r} \rightarrow X_{i_{r+1}}$
  - $\neg X_{i_1} \vee ... \vee \neg X_{i_r} \equiv X_{i_1} \wedge ... \wedge X_{i_r} \rightarrow 0$

Hornformeln ohne unnegierte 1-Klauseln der Gestalt $1 \rightarrow X_i$ sind immer erfüllbar.

Aufgabe 6.7

Angenommen, wir haben Apparaturen zur Durchführung folgender chemischer Reaktionen:

$$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$$
$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$
$$H_2O + CO_2 \rightarrow H_2CO_3$$

Ferner haben wir folgende Grundstoffe: MgO, H_2, O_2, C.

Man beweise unter Verwendung des Hornformel-Algorithmus, dass es nun möglich ist, H_2CO_3 herzustellen.

Aufgabe 6.7

$$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$$
$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$
$$H_2O + CO_2 \rightarrow H_2CO_3$$

Grundstoffe: MgO, H_2, O_2, C

$X_1 \hat{=} MgO$

$X_2 \hat{=} H_2$

$X_3 \hat{=} O_2$

$X_4 \hat{=} C$

$X_5 \hat{=} Mg$

$X_6 \hat{=} H_2O$

$X_7 \hat{=} CO_2$

$X_8 \hat{=} H_2CO_3$

Zu zeigen:

$$C = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_6)$$
$$\wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

ist nicht erfüllbar.

Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in C enthaltenen 1-Klausel X_1:

$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$

Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in C enthaltenen 1-Klausel X_1:

$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$

Analog erhalten wir:
$C|_{X_1=1,X_2=1} = X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$

Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in C enthaltenen 1-Klausel X_1:

$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$

Analog erhalten wir:

$C|_{X_1=1,X_2=1} = X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$

$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1} = X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$

Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in C enthaltenen 1-Klausel X_1:

$$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Analog erhalten wir:

$$C|_{X_1=1,X_2=1} = X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1} = X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1} = X_5 \wedge X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in C enthaltenen 1-Klausel X_1:

$$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Analog erhalten wir:

$$C|_{X_1=1,X_2=1} = X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1} = X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1} = X_5 \wedge X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1} = X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in C enthaltenen 1-Klausel X_1:

$$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Analog erhalten wir:

$$C|_{X_1=1,X_2=1} = X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1} = X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1} = X_5 \wedge X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1} = X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1,X_6=1} = X_7 \wedge (\neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Aufgabe 6.7

Wir starten mit der in C enthaltenen 1-Klausel X_1:

$$\Rightarrow C|_{X_1=1} = X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \wedge (\neg X_2 \vee X_5) \wedge (\neg X_2 \vee X_6) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$

Analog erhalten wir:

$$C|_{X_1=1,X_2=1} = X_3 \wedge X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1} = X_4 \wedge X_5 \wedge X_6 \wedge (\neg X_4 \vee X_7) \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1} = X_5 \wedge X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1} = X_6 \wedge X_7 \wedge (\neg X_6 \vee \neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1,X_6=1} = X_7 \wedge (\neg X_7 \vee X_8) \wedge \neg X_8$$
$$C|_{X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1,X_5=1,X_6=1,X_7=1} = X_8 \wedge \neg X_8$$

$$\Rightarrow C \notin \mathrm{SAT}$$

Aufgabe 6.8a

Aufgabe 6.8a

Definition 5

Es sei C eine CNF-Formel über $X_1, ..., X_n$. Eine Klausel R heißt Resolvent der Klauseln K und N, falls eine Variable X existiert mit $K = X \vee K'$ und $N = \neg X \vee N'$ und $R = K' \vee N'$. R heißt Resolvent einer CNF-Formel C, falls R Resolvent zweier Klauseln von C ist.

Aufgabe 6.8a

Definition 5

Es sei C eine CNF-Formel über $X_1, ..., X_n$. Eine Klausel R heißt Resolvent der Klauseln K und N, falls eine Variable X existiert mit $K = X \vee K'$ und $N = \neg X \vee N'$ und $R = K' \vee N'$. R heißt Resolvent einer CNF-Formel C, falls R Resolvent zweier Klauseln von C ist.

Lemma 6

Ist R Resolvent von C, so ist R Klausel von C, d.h. $C \wedge R \equiv C$.

Aufgabe 6.8a

Man zeige mit Hilfe des Resolutionsalgorithmus, dass

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \notin \mathrm{SAT}$$

Aufgabe 6.8a

$$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land (A \lor \neg C) \land (A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)$$

Aufgabe 6.8a

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

$$A \vee B$$

Aufgabe 6.8a

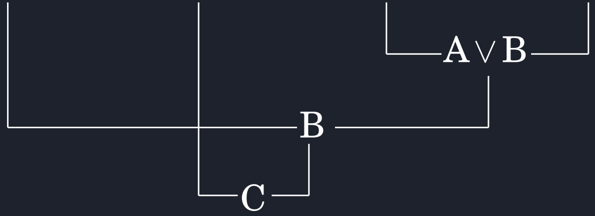
$$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land (A \lor \neg C) \land (A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)$$

$$A \lor B$$

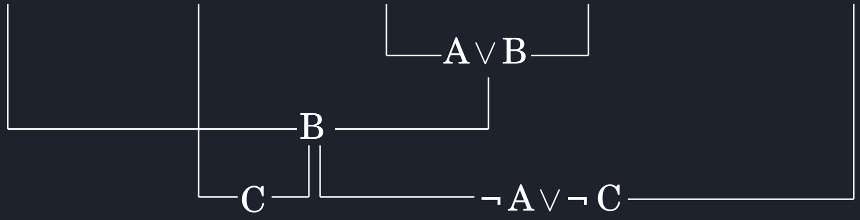
$$B$$

Aufgabe 6.8a

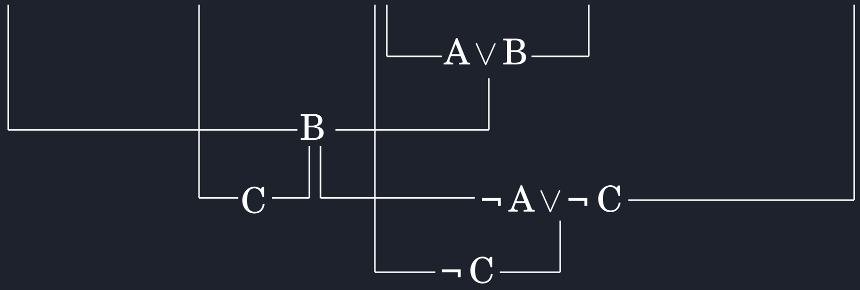
$$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land (A \lor \neg C) \land (A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)$$



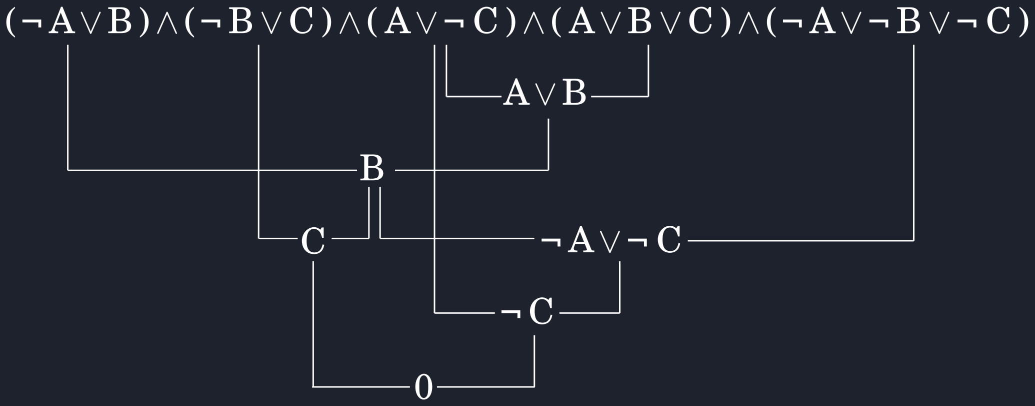
$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$



$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$



Aufgabe 6.8a


$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$
$A \vee B$
B
C
$\neg A \vee \neg C$
$\neg C$
0

Aufgabe 6.8b

Man zeige mit Hilfe des Resolutionsalgorithmus, dass

$$(B \vee C \vee \neg D) \wedge (B \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg B)$$

Aufgabe 6.8b

$$(B \lor C \lor \neg D) \land (B \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land (\neg B)$$

Aufgabe 6.8b

$$(B \lor C \lor \neg D) \land (B \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land (\neg B)$$

$$B \lor \neg D$$

Aufgabe 6.8b

$$(B \lor C \lor \neg D) \land (B \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land (\neg B)$$

$$B \lor \neg D$$

$$B$$

Aufgabe 6.8b

$$(B \lor C \lor \neg D) \land (B \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land (\neg B)$$

$$B \lor \neg D$$

$$B$$

$$0$$


That's all Folks!