Matthias Krause
Alexander Moch

Mannheim, den 18.03.2020

CS 406 Theoretische Informatik, Frühjahrssemester 2020

Übungsblatt 3

AUFGABE 3.1:
Zeige, dass $\leq_p$ eine reflexive und transitive Relation auf $\mathcal{NP}$ ist.

Hinweis: O.B.d.A. kann hier angenommen werden, dass die Polynome, welche die Worst-Case-Rechenzeiten der entsprechenden Transformationen angeben, monoton wachsend seien.

AUFGABE 3.2:
Man zeige, dass $\mathcal{NP}$ abgeschlossen gegenüber $\leq_p$ ist (d.h., aus $L \leq_p L'$ und $L' \in \mathcal{NP}$ folgt $L \in \mathcal{NP}$).

AUFGABE 3.3:
Wir nennen zwei Sprachen $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ polynomiell isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, so dass f eine polynomielle Reduktion von L_1 nach L_2 und f^{-1} eine polynomielle Reduktion von L_2 nach L_1 ist.
Zeige, dass die folgenden Probleme (als Sprachen formuliert) polynomiell isomorph sind. Die Instanzen bestehen aus einem (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ und einer Zahl $K \in \{0, \dots, |V|\}$.

Independent Set : G enthält eine unabhängige Menge der Größe mindestens K, d.h. eine Menge von Knoten $U \subseteq V$ der Größe $K = |U|$, sodass keine zwei Knoten in U durch eine Kante verbunden sind.

Clique : G einhält eine Clique der Größe mindestens K, d.h. eine Menge von Knoten $U \subseteq V$ der Größe $K = |U|$, sodass jeder Paar von Knoten in U durch eine Kante verbunden ist.

Vertex Cover : G enthält eine Knotenüberdeckung der Größe höchstens K, d.h. eine Menge von Knoten $U \subseteq V$ der Größe $K = |U|$, sodass jede Kante in E mindestens einen Knoten aus U enthält.

AUFGABE 3.4:
In dieser Aufgabe sind die Eingaben DNF-Formeln (d.h. Disjunktionen $M_1 \vee \dots \vee M_n$ von Konjunktionen $L_1 \wedge \dots \wedge L_s$ von Literalen L_i). Für jedes der folgenden Probleme ist zu entscheiden, ob es in $\mathcal{P}$ liegt oder $\mathcal{NP}$-schwer ist (jeweils mit Begründung).

a) Gibt es eine Belegung der Variablen, welche die DNF-Formel zu Eins macht?

b) Gibt es eine Belegung der Variablen, welche die DNF-Formel zu Null macht?

AUFGABE 3.5:
Das *Directed Hamiltonian Cycle* (DHC) Problem wird analog zum (Undirected) Hamiltonian Cycle (HC) Problem definiert: Existiert in einem gegebenen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ein Hamiltonkreis?

a) Finde eine polynomielle Reduktion von HC zu DHC.

b) Finde eine polynomielle Reduktion von DHC zu HC.