

# Theoretische Informatik

FSS 2020 - Tutorium #1

---

Alexander Moch

2020-02-24

## Aufgabe 1.1

---

## Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Wie lautet die von  $M$  akzeptierte Sprache?

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Leeres Band:



$\implies$  Schreibe #. Wechsle zu  $q_4$ . Gehe nach links.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Leeres Band:



$\implies$  Terminiere. Die Maschine akzeptiert die Eingabe.

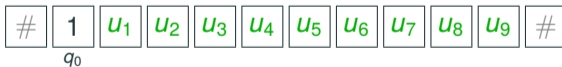
Das leere Wort  $\epsilon$  wird akzeptiert.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 1:



$\implies$  Terminiere. Die Eingabe wird nicht akzeptiert.

Alle Wörter, welche mit 1 beginnen, werden nicht akzeptiert.



# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe #. Wechsle zu  $q_1$ . Gehe nach rechts.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe  $u_1$ . Bleibe in  $q_1$ . Gehe nach rechts.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe  $u_2$ . Bleibe in  $q_1$ . Gehe nach rechts.

...

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe  $u_9$ . Bleibe in  $q_1$ . Gehe nach rechts.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



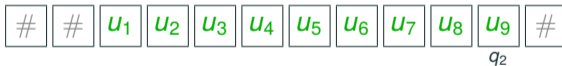
$\implies$  Schreibe  $\#$ . Wechsle zu  $q_2$ . Gehe nach links.

## Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



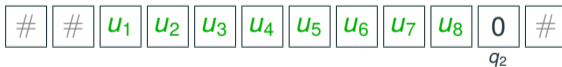
Es gibt hier zwei Möglichkeiten.

## Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



Sei  $u_9 = 0 \implies$  Terminiere.



Alle Wörter, welche mit 0 enden, werden nicht akzeptiert.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



Sei  $u_9 = 1 \implies$  Schreibe #. Wechsle zu  $q_3$ . Gehe nach links.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe  $u_8$ . Bleibe in  $q_3$ . Gehe nach links.

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe  $u_7$ . Bleibe in  $q_3$ . Gehe nach links.

...

# Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe  $u_1$ . Bleibe in  $q_3$ . Gehe nach links.

## Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



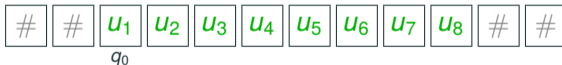
$\implies$  Schreibe #. Wechsle zu  $q_0$ . Gehe nach rechts.

## Aufgabe 1.1

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erstes Zeichen eine 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Wir sind wieder in  $q_0$ . Der String ist zwei Zeichen kleiner.



## Beobachtungen

- Das leere Wort  $\epsilon$  wird akzeptiert.
- $M$  schaut ob das erste Zeichen eine 0 ist.
- Dann schaut  $M$ , ob das letzte Zeichen eine 1 ist.
- Beide werden jeweils durch  $\#$  ersetzt.
- Der Kopf geht an den Anfang und wieder in  $q_0$ .
- Es werden die Zustände  $q_0, q_1, \dots, q_1, q_2, q_3, \dots, q_3, q_0$  durchlaufen.
- Bei jedem Durchlauf wird das Wort auf dem Band kleiner.
- Die Turingmaschine terminiert auf allen Eingaben.

$\{0^i 1^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$  wird akzeptiert.

## Aufgabe 1.2

---

### Teilaufgabe a)

Es stehe eine beliebig lange Folge von Einsen auf dem Band.

Nach dem Halten soll diese Folge zweimal auf dem Band stehen, durch ein # getrennt.

Für nichtleere Eingaben, soll sich der Kopf in der Endkonfiguration auf dem ersten # rechts der Lösung befinden.

# Aufgabe 1.2

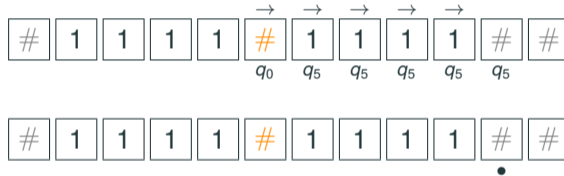


# Aufgabe 1.2



...

# Aufgabe 1.2



## Aufgabe 1.2

Turingmaschine  $M$

$\delta$	#	1
$q_0$	$(q_5, \#, R)$	$(q_1, \#, R)$
$q_1$	$(q_2, \#, R)$	$(q_1, 1, R)$
$q_2$	$(q_3, 1, L)$	$(q_2, 1, R)$
$q_3$	$(q_4, \#, L)$	$(q_3, 1, L)$
$q_4$	$(q_0, 1, R)$	$(q_4, 1, R)$
$q_5$	—	$(q_5, 1, R)$



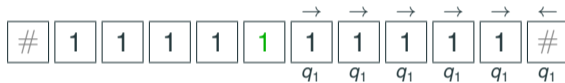
### Teilaufgabe b)

Die TM soll zwei positive Zahlen in Unärdarstellung addieren.

Diese stehen getrennt durch ein # auf dem Band.

In der Endkonfiguration steht der Kopf auf dem ersten Leerzeichen rechts der Antwort.

# Aufgabe 1.2



## Aufgabe 1.2

Turingmaschine  $M$

$\delta$	#	1
$q_0$	$(q_1, 1, R)$	$(q_0, 1, R)$
$q_1$	$(q_2, \#, L)$	$(q_1, 1, R)$
$q_2$	—	$(q_2, \#, N)$

### Teilaufgabe c)

Gesucht ist eine Turingmaschine, welche die Sprache

$$L = \{0^i 1^i \mid i \in \mathbb{N}, i \geq 2\}$$

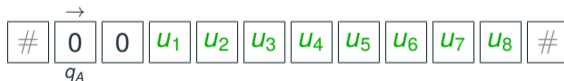
über dem Eingabealphabet  $\{0, 1\}$  akzeptiert.

## Aufgabe 1.2

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_A$	$(q_B, 0, R)$	—	—
$q_B$	$(q_0, 0, L)$	—	—
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erste beide Zeichen jeweils 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



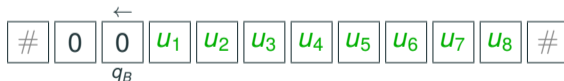
$\implies$  Schreibe 0. Wechsle zu  $q_B$ . Gehe nach rechts.

## Aufgabe 1.2

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_A$	$(q_B, 0, R)$	—	—
$q_B$	$(q_0, 0, L)$	—	—
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erste beide Zeichen jeweils 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



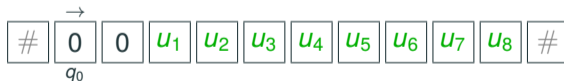
$\implies$  Schreibe 0. Wechsle zu  $q_0$ . Gehe nach links.

## Aufgabe 1.2

Turingmaschine  $M$

$\delta$	0	1	#
$q_A$	$(q_B, 0, R)$	—	—
$q_B$	$(q_0, 0, L)$	—	—
$q_0$	$(q_1, \#, R)$	—	$(q_4, \#, L)$
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \#, L)$
$q_2$	—	$(q_3, \#, L)$	—
$q_3$	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \#, R)$
$q_4$	—	—	—

Erste beide Zeichen jeweils 0, restliche Zeichen  $u_i \in \{0, 1\}$ :



$\implies$  Schreibe  $\#$ . Wechsle zu  $q_1$ . Gehe nach rechts.

## Aufgabe 1.3

---



### Teilaufgabe a)

Gib einen 2-Busy-Beaver an.

# Aufgabe 1.3

2-Busy-Beaver

$\delta$	#	1
$q_0$	$(q_1, 1, R)$	$(q_1, 1, L)$
$q_1$	$(q_0, 1, L)$	$(q_1, 1, N)$



### Teilaufgabe b)

Die Funktion  $bb : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gibt für jedes  $n$  die maximale Anzahl von Einsen an, die ein  $n$ -Busy-Beaver schreiben kann.

Zeige, dass  $bb$  streng monoton wächst.

## Aufgabe 1.3

- Sei der neue Zustand  $q_{\text{neu}}$ .
- Aus dem vorherigen Endzustand, geht die Maschine in  $q_{\text{neu}}$ .
- Schreibe 1 und gehe nach rechts, bis  $\#$  erreicht worden ist.
- Überschreibe mit 1 und stoppe.

## Aufgabe 1.4

---

## Aufgabe 1.4

Bestimme die asymptotischen Laufzeiten der folgenden drei Turingmaschinen in O-Notation.

- a)  $M_1$  ist eine 1-Band Turingmaschine und  $x$  steht auf Band 1.  $M_1$  wendet Inkrementiere solange auf die Inschrift auf Band 1 an, bis dort ein String aus  $n$  Einsen steht.
- b)  $M_2$  ist eine 2-Band Turingmaschine und  $x$  steht auf Band 1.  $M_2$  kopiert  $x$  auf Band 2 und inkrementiert die Inschrift auf Band 1 genau so oft, wie  $x$  Binärstellen hat. Also wird die Inschrift auf Band 1  $n$ -mal inkrementiert.
- c)  $M_3$  ist eine 3-Band Turingmaschine,  $x$  steht auf Band 1 und auf Band 2 und 3 steht jeweils 0.  
 $M_3$  geht zeichenweise über  $x$  von links nach rechts und inkrementiert den Zähler auf Band 2, wenn auf Band 1 eine 0 gelesen wird und inkrementiert den Zähler auf Band 3, wenn auf Band 1 eine 1 gelesen wird.

## Aufgabe 1.4

Bestimme die asymptotischen Laufzeiten der folgenden drei Turingmaschinen in O-Notation.

- a)  $M_1$  ist eine 1-Band Turingmaschine und  $x$  steht auf Band 1.  $M_1$  wendet Inkrementiere solange auf die Inschrift auf Band 1 an, bis dort ein String aus  $n$  Einsen steht.

Im schlechtesten Fall steht auf Band 1 ein String aus  $n$  Nullen. Das heißt wir müssen  $2^n - 1$  Mal Inkrementiere aufrufen um einen String aus  $n$  Einsen zu bekommen.

Der Gesamtaufwand beträgt  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ .

## Aufgabe 1.4

Bestimme die asymptotischen Laufzeiten der folgenden drei Turingmaschinen in O-Notation.

- b)**  $M_2$  ist eine 2-Band Turingmaschine und  $x$  steht auf Band 1.  $M_2$  kopiert  $x$  auf Band 2 und inkrementiert die Inschrift auf Band 1 genau so oft, wie  $x$  Binärstellen hat. Also wird die Inschrift auf Band 1  $n$ -mal inkrementiert.

Kopieren hat einen Aufwand von  $\mathcal{O}(n)$ . Nach jedem Inkrementieren von  $x$  auf Band 1 geht der Kopf auf Band 2 ein Zeichen weiter.

Der Gesamtaufwand beträgt  $\mathcal{O}(n^2)$ .



## Aufgabe 1.4

Bestimme die asymptotischen Laufzeiten der folgenden drei Turingmaschinen in O-Notation.

- c)  $M_3$  ist eine 3-Band Turingmaschine,  $x$  steht auf Band 1 und auf Band 2 und 3 steht jeweils 0.  
 $M_3$  geht zeichenweise über  $x$  von links nach rechts und inkrementiert den Zähler auf Band 2, wenn auf Band 1 eine 0 gelesen wird und inkrementiert den Zähler auf Band 3, wenn auf Band 1 eine 1 gelesen wird.

Hier wird erneut  $n$  mal inkrementiert. Allerdings nehmen die Zähler auf Band 2 und 3 maximal den Wert  $n$  an. Somit hat Inkrementiere eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(\log n)$ .

Der Gesamtaufwand beträgt  $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ .