

**Das inverse Problem
des eindimensionalen periodischen
Schrödingeroperators**

Diplomarbeit

Jörg Zentgraf

24.Mai 2006

Institut für Mathematik, Universität Mannheim
Prof. Dr. Martin Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1. Spektraltheorie des Schrödingeroperators	13
1.1. Fundamentallösung	13
1.2. Hill-Diskriminante	29
1.3. Eigenschaften der Fundamentallösung	34
1.4. Dirichlet-Problem	38
2. Inverses Problem	53
2.1. Definition der Riemannschen Fläche	53
2.2. KdV-Hierarchie	58
2.3. Dirichlet-Divisor	62
2.4. Dubrovin-Gleichungen und Spurformel	64
3. Parametrisierung der Hill-Diskriminante	73
3.1. Resultate	73
3.2. Beispiele	77
3.3. Von der Diskriminante zur Klasse IC	80
3.4. Von der Klasse IC zur Diskriminante	82
4. Ausblick	85
A. Satz von Rouché	87
B. Ganze Funktionen	89
B.1. Faktorisierungssatz von Hadamard	89
B.2. Unendliche Produkte	93
Literaturverzeichnis	96

Symbolverzeichnis

L	Schrödingeroperator, $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$
$Ly = \lambda y$	Hillgleichung
$L_{\mathbb{C}}^2[0, 1]$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen mit Periode 1
c_λ, s_λ	$c_\lambda(x) = \cos \sqrt{\lambda}x$, $s_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt auf $L_{\mathbb{C}}^2[0, 1]$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$
$\ \cdot\ $	Norm auf $L_{\mathbb{C}}^2[0, 1]$, $\ f\ = \sqrt{\langle f, f \rangle}$
$M(\lambda)$	Monodromie, $M(\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(1, \lambda, q) & y_2(1, \lambda, q) \\ y_1'(1, \lambda, q) & y_2'(1, \lambda, q) \end{pmatrix}$
$[\cdot, \cdot]$	Wronski-Determinante, $[f, g] = fg' - f'g$
$\Delta(\lambda)$	Hill-Diskriminante, $\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}(y_1(1, \lambda, q) + y_2'(1, \lambda, q))$
ω_i	periodische und antiperiodische Eigenwerte
l^2	Hilbertraum aller Folgen mit $\sum_{n \geq 1} a_n^2 < \infty$
$\mu_n(q)$	n -ter Dirichleteigenwert zum Potential q
\mathcal{K}	Riemannsche Fläche, $\mathcal{K} : y^2 = -\prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_j}\right)$
f_l	Polynom in q , $f_l' = -\frac{1}{4}f_{l-1}''' + qf_{l-1}' + \frac{1}{2}q'f_{l-1}$
P_{2n+1}	Differentialausdruck, $P_{2n+1} = \sum_{j=0}^n (f_{n-j} \frac{d}{dx} - \frac{1}{2}f_{n-j}')L^j$
IC	Menge Riemannscher Flächen

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist das inverse Problem des eindimensionalen periodischen Schrödingeroperators $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ für komplexwertige *Potentiale* $q \in L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ zu lösen.

Zunächst stellen wir zu dem Schrödingeroperator die Hillgleichung $Ly = \lambda y$ auf, wobei die Funktion $q \in L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ eine quadratintegrierbare komplexwertige Funktion mit Periode 1 ist. Wenn man sich Randbedingungen bei 0 und 1 vorgibt, so heißen die Werte λ , für die diese Gleichung eine Lösung besitzt, *Eigenwerte*, die zugehörige Lösung heißt *Eigenfunktion*. Das *Spektrum* eines Operators ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, so dass $L - z\mathbb{1}$ nicht invertierbar ist, in unserem Fall ist das Spektrum die Menge aller Eigenwerte.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit zwei Problemen. Als Erstes interessiert uns wie man bei gegebenem Potential und gegebenen Randbedingungen die dazugehörigen Eigenwerte bestimmt und welche Eigenschaften diese Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzen. Anschließend stellen wir uns dem inversen Problem, dabei gibt es mehrere Teilprobleme. Zum einen sucht man einer Beschreibung der Menge von Potentialen, die das gleiche Spektrum besitzen. Zum anderen sucht man eine Formel, die bei gegebenen Zusatzinformationen dann eindeutig ein Potential aus den gegebenen Daten rekonstruiert. Außerdem sucht man nach allen möglichen Spektren, die überhaupt auftreten können. Insgesamt werden also zwei Parametrisierungen gesucht, zunächst eine Parametrisierung der möglichen Spektren und dann bei gegebenem Spektrum eine Parametrisierung der Potentiale mit diesem Spektrum.

Die allgemeine Theorie von Eigenwertgleichungen wurde bereits von Sturm [34] und Liouville [22] im Jahre 1836 entwickelt. Sie betrachteten eine Differentialgleichung der Form

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda w(x)y,$$

die sich mit $p(x) \equiv 1$ und $w(x) \equiv 1$ auf unseren Fall zurückführen lässt. Dazu sind die

Randbedingungen

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0,$$

$$y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0$$

gegeben, wobei α und β reelle Zahlen zwischen 0 und π sind. Dieses Beispiel führte zu einer großen Untersuchung von Eigenwertproblemen und Eigenschaften der zugehörigen Eigenfunktionen, der sogenannten Spektraltheorie. Die Eigenfunktionen bilden im Fall eines reellen Potentials ein orthonormales Erzeugendensystem des unendlich dimensionalen Raumes $L^2_{\mathbb{R}}$. Hierzu brauchen wir das Standardskalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt,$$

das für alle Funktionen $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ definiert ist. Betrachtet man nur reelle Potentiale, so ist der Schrödingeroperator selbstadjungiert

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$$

und das Eigenwertproblem sowie das inverse Problem sind vollständig gelöst. Bei komplexen Potentialen ist der Operator nicht mehr selbstadjungiert und es muss an einigen Stellen neue Theorie entwickelt werden.

Bei der Bestimmung des Spektrums muss man unterscheiden zwischen zwei Fällen. Zum einen setzt man das Potential periodisch auf ganz \mathbb{R} fort, zum anderen stellt man Randbedingungen an den Stellen 0 und 1 an die Hillgleichung. Diese beiden Fällen liefern unterschiedliche Spektren. Zunächst betrachten wir im ersten Fall das Spektrum auf ganz \mathbb{R} . Dieses Spektrum des Schrödingeroperators wird eindeutig bestimmt durch die Gleichung $\mu^2 - 2\Delta(\lambda)\mu + 1 = 0$, hierbei ist $\Delta(\lambda)$ die später beschriebene Hill-Diskriminante. Die Variable μ entspricht einem Eigenwert der Monodromie, der Translation einer Lösung der Hillgleichung um die Periodenlänge 1. Es gilt für eine Eigenfunktion $\phi(x)$ mit dem Eigenwert μ die Gleichung $\phi(1) = \mu\phi(0)$. Jedes μ entspricht somit einer quasiperiodischen Randbedingung der Hillgleichung. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Differentialgleichung der Monodromie gilt auch $\phi(x+1) = \mu\phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist $\mu = \pm 1$, so spricht man von periodischen und antiperiodischen Randbedingungen und somit auch von periodischen und antiperiodischen Eigenwerten, bezeichnet mit ω_i . Dabei ist ω_i periodisch für $i = 4n - 3, 4n - 2$ und antiperiodisch für $i = 4n - 1, 4n$, $n \in \mathbb{N}$. Auf zwei periodische Eigenwerte folgen also immer zwei antiperiodische und

umgekehrt. Es gilt für einen periodischen Eigenwert $\Delta(\omega_i) = 1$ und für einen antiperiodischen $\Delta(\omega_j) = -1$. Asymptotisch liegen jeweils zwei periodische Eigenwerte nahe beieinander, sie können allerdings auch zusammenfallen, das gleiche gilt ebenfalls für die antiperiodischen Eigenwerte. Löst man die obige Gleichung nach μ auf, so erhält man die Funktion $\mu = \Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta(\lambda)^2 - 1}$. Diese Funktion liefert uns eine Beziehung zwischen λ und μ , die uns eine Bandstruktur definiert, wie wir nun erklären werden. Ein Eigenwert λ gehört bei einem reellen Potential genau dann zum Spektrum auf ganz \mathbb{R} , wenn $\Delta(\lambda)$ im Intervall $[-1, 1]$ liegt, dies ist äquivalent zu $|\mu| = 1$. Die Vereinigung aller Spektren mit quasiperiodischen Randbedingungen mit $|\mu| = 1$ liefert also das Spektrum auf ganz \mathbb{R} . In den Intervallen zwischen zwei aufeinanderfolgenden periodischen oder zwei aufeinanderfolgenden antiperiodischen Eigenwerten gilt $|\Delta(\lambda)| > 1$ und somit besitzt das Spektrum dort eine Lücke, diese Intervalle nennt man *Bandlücken*. Dementsprechend heißen die Intervalle zwischen einem periodischen und antiperiodischen Eigenwert *Bänder*. Diese beiden Begriffe zusammen definieren die *Bandstruktur*, sie ist eindeutig definiert durch die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte und somit durch die Beziehung zwischen μ und λ . Diese Eigenwerte definieren aufgrund der analytischen Fortsetzbarkeit vollständig die Hill-Diskriminante und somit ist jedes Spektrum zu jedem μ bekannt. Also ist die komplette Information über das Spektrum auf ganz \mathbb{R} bereits in der Bandstruktur enthalten. Bei komplexen Potentialen führt man eine Riemannsche Fläche ein, die das Spektrum beschreibt. Die Fläche wird definiert als Graph der zweiwertigen Funktion $\Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta(\lambda)^2 - 1}$. Die Fläche erhält man, indem man zwei Kopien der komplexen Ebene nimmt, beide entlang des Spektrums schneidet und die beiden Kopien dann wie folgt zusammenklebt. Die Oberseite jedes Schnitts $[\omega_{2i-1}, \omega_{2i}]$ auf der einen Kopie wird mit der Unterseite des gleichen Schnitts auf der anderen Kopie verklebt und umgekehrt. Wenn zwei (anti-)periodische Eigenwerte nicht zusammenfallen, so sind beide Verzweigungspunkte auf der Riemannschen Fläche. Somit erhält man die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche direkt aus der Bandstruktur. Betrachtet man als zweiten Fall das Spektrum des Operators, der nur auf $[0, 1]$ definiert ist, so sind die Eigenwerte analytisch abhängig von der Wahl der Randbedingungen. Man kann sich zum Beispiel die quasiperiodischen Randbedingungen $y(0) = \mu y(1)$ wie oben vorgeben. Im Fall von Dirichletrandbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ erhält man die Dirichleiteigenwerte. Die Dirichleiteigenwerte liegen bei reellen Potentialen genau in den Bandlücken und jeder Dirichleiteigenwert kann sich in diesen Lücken sogar an jeder beliebigen Stelle befinden, unabhängig von allen anderen Dirichleiteigenwerten. Bei komplexen Potentialen ist der Sachverhalt etwas komplizierter. Die Dirichleiteigenwerte befinden sich auf der oben beschriebenen Riemannschen Fläche. Da diese eine zweiblättrige Überlagerung der komplexen Ebene ist, benötigt man noch ein Vorzeichen, damit eindeutig wird auf welchem Blatt sie sich befinden. Man beschreibt die Dirichleiteigenwerte in diesem Fall

als Divisor auf der Riemannschen Fläche.

Das inverse Problem hat nicht so tiefreichende Wurzeln wie die Spektraltheorie. Die erste Arbeit, die sich ausführlich damit beschäftigt, stammt aus dem Jahre 1946 von Borg [3]. Im Falle allgemeiner Randbedingungen bei reellen Potentialen wurde einiges an Theorie entwickelt, siehe hierzu vor allem [15], [16] und [25] von Isaacson und McKean. Man startet mit einer Riemannschen Fläche mit der oben beschriebenen Bandstruktur. Da diese Riemannsche Fläche eindeutig durch die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte bestimmt wird, sind auch diese gegeben. Da wie oben beschrieben jeder Dirichleteigenwert irgendwo in seiner Bandlücke bzw. auf seiner zweiblättrigen Überlagerung der komplexen Ebene liegen kann, gibt es auch viele Potentiale, die die gleiche Bandstruktur besitzen, man muss nur jeden Dirichleteigenwert etwas verschieben. Man sucht nun eine Beschreibung der Menge aller Potentiale mit der gleichen Bandstruktur, dieses Problem bezeichnet man als Isospektralproblem. Wenn man die Isospektralmenge gegeben hat, möchte man auch gerne wissen, welche Zusatzinformationen dann das Potential eindeutig festlegen. In unserem Fall sind genau die Dirichleteigenwerte eine solche Zusatzinformation. Gibt man sich nun beliebige Divisoren für die Dirichleteigenwerte auf der Riemannschen Fläche vor, so sucht man eine Formel für das Potential, das genau diese Bandstruktur und Dirichleteigenwerte besitzt. Eine andere Frage betrifft die Menge aller möglichen Bandstrukturen, man sucht eine Charakterisierung aller Riemannschen Flächen, die die Bandstruktur einer Hill-Diskriminante darstellen.

Im einfachsten Fall, wenn man Dirichletrandbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

und ein reelles Potential vorgibt, gibt es eine einfache physikalische Interpretation des inversen Problems. Setzen wir $u = u(x, t)$ für $x \in [0, L]$, so erfüllt eine frei schwingende Saite der Länge L mit variabler Massenverteilung $\rho(x) > 0$ die Wellengleichung

$$\rho(x)u_{tt} = u_{xx}$$

mit den Randbedingungen $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$. Eine periodische Vibration der Form

$$u = y(x)(a \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

mit Frequenz ω heißt reiner Ton. Separiert man die Variablen, so erfüllt y die Gleichung

$$y'' + \omega^2 \rho(x)y = 0$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Nun kann man einige Fragen stellen. Auf wie viele Arten kann die Masse auf der Saite verteilt sein, um eine gegebene Menge von Frequenzen zu erzeugen oder wann ist eine Menge von Zahlen die Menge von Frequenzen auf einer tatsächlich schwingenden Saite? Das obige Problem kann in den Sturm-Liouville-Fall transformiert werden, wenn $\rho(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Somit kann das inverse Dirichletproblem als natürliche Fragestellung an die reinen Töne von Saiten interpretiert werden.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert :

Im 1.Kapitel beschäftigen wir uns mit der Spektraltheorie des Schrödingeroperators. Wir betrachten das Eigenwertproblem mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda, q) &= y_2'(0, \lambda, q) = 1, \\ y_1'(0, \lambda, q) &= y_2(0, \lambda, q) = 0. \end{aligned}$$

Dann zeigen wir, dass die Funktionen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ ein Fundamentalsystem bilden. Es kann also jede Lösung y als Linearkombination von $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ geschrieben werden. Wir werden zeigen, dass die beiden Funktionen in Reihen entwickelt werden können, in denen Sinus- und Cosinusfunktionen auftreten. Anschließend beweisen wir Abschätzungen für beide Funktionen, die sich wie $\cos \sqrt{\lambda}x$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x$ verhalten. Eine wichtige Gleichung für die Beziehung zwischen den beiden Funktionen ist die Wronski-Identität $y_1 y_2' - y_1' y_2 = 1$. Da unser Potential in dem Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}$ liegt, können wir auch nach diesem Potential ableiten und erhalten Formeln für diese Ableitung. Diese Betrachtungen sind alle sehr ausführlich und klar im Standardwerk [30] von Pöschel und Trubowitz bewiesen. Als nützliches Hilfsmittel, das uns das ganze inverse Problem begleiten wird, erweist sich die Hill-Diskriminante $\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}(y_1(1, \lambda, q) + y_2'(1, \lambda, q))$. Diese wurde von Magnus und Winkler in [23] eingehend untersucht. Wir werden Abschätzungen für diese Diskriminante beweisen und die Ableitung von $\Delta(\lambda)$ nach λ berechnen. Außerdem beweisen wir, dass die Funktion $\Delta(\lambda)$ unendlich viele Nullstellen besitzt, dies wird uns im zweiten Kapitel helfen. Im Falle von Dirichletrandbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ sind die Eigenwerte die Nullstellen der Funktion $y_2(1, \lambda, q)$. Betrachtet man das freie Potential $q \equiv 0$, so sind die Dirichleteigenwerte die Punkte $n^2\pi^2$. Im Falle eines beliebigen Potentials liegen die Dirichleteigenwerte auch nahe bei diesen Punkten, wobei sie noch um eine Konstante verschoben sind. Um dies zu beweisen führen wir die Hillgleichung in Matrixschreibweise ein und zeigen einige Abschätzungen für diese Matrix. Wir erhalten insgesamt für die Dirichleteigenwerte $\mu_n(q)$ die Abschätzung

$$\mu_n(q) = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(s)ds + e_n.$$

Dabei ist e_n eine quadratsummierbare Folge, d.h. es gilt $\sum e_n^2 < \infty$. Wir erhalten mit Hilfe dieser Dirichleiteigenwerte auch noch die Produktentwicklung der Funktion $y_2(1, \lambda, q)$ als

$$y_2(1, \lambda, q) = \prod_{m \geq 1} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2}.$$

Somit ist die ganze Information über die Funktion $y_2(1, \lambda, q)$ bereits im Dirichletspektrum enthalten.

Im 2.Kapitel beschäftigen wir uns mit dem inversen Problem. Wir geben uns eine Bandstruktur und Punkte vor, die Dirichleiteigenwerte sein sollen und die Abschätzungen aus dem ersten Kapitel erfüllen. Nun stellen wir die Frage, ob zu diesen Werten ein Potential existiert und wie wir dieses bestimmen können. Wir führen dazu eine Riemannsche Fläche ein, die Verzweigungspunkte dieser Fläche sind die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte der Hillgleichung, d.h. die Nullstellen der Funktionen $\Delta(\lambda) \pm 1$. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten ω_{2j-1} und ω_{2j} definiert uns die Hill-Diskriminante zwei Blätter, auf denen der Dirichleiteigenwert liegen muss. Eine Parametrisierung der Riemannschen Fläche ist

$$\mathcal{K} : y^2 = R(\lambda) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_j} \right).$$

Ist das Potential reellwertig, so sind alle Eigenwerte reell und die Blätter verschmelzen zu einer Linie zwischen den Eigenwerten. Jeder Dirichleiteigenwert muss sich in so einer Bandlücke befinden. Bei komplexen Potentialen stellen wir die Dirichleiteigenwerte als Divisor auf der Riemannschen Fläche dar. Wir führen die KdV-Hierarchie ein, eine Folge von Differentialausdrücken ungerader Ordnung, die mit dem Schrödingeroperator kommutieren. Die Darstellung der KdV-Hierarchie basiert auf [10] und die Erweiterung auf den Fall $n = \infty$ findet man in [9]. Mit Hilfe der KdV-Hierarchie zeigen wir, dass dann die Dirichleiteigenwerte $\mu_i(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x} = - \frac{\left(\prod_{j \in \mathbb{N}} (\mu_j(x) - \lambda) \right)'}{\prod_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \neq i}} (\mu_j - \mu_i)}, \quad i \in \mathbb{N}$$

erfüllen. Wenn wir uns zusätzlich einen Divisor auf der Riemannschen Fläche als Startbedingung dieser Differentialgleichung vorgeben, so existiert ein offenes Intervall, in dem

die Lösung der Differentialgleichung eindeutig ist. Aus der Betrachtung von asymptotischen Eigenschaften der Funktion

$$g(P, x) := \frac{1 \prod_{j \in \mathbb{N}} ((\mu_j(x) - \lambda) / (\omega_{2j-1} \omega_{2j})^{1/2})}{2 [(\omega_0 - \lambda) \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - (\lambda / \omega_m))]^{1/2}}$$

erhalten wir die Spurformel

$$q(x) = \omega_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} (\omega_{2j-1} + \omega_{2j} - 2\mu_j(x)).$$

zur Rekonstruktion des Potentials aus den Eigenwerten. Das Isospektralproblem werden wir im Rahmen dieser Arbeit nicht lösen, da dies den Umfang zu stark erhöht hätte.

Das 3. Kapitel bietet einen Überblick über die Arbeit [36] von Tkachenko. Wir lösen das Problem, welche Eigenschaften eine Riemannsche Fläche haben muss, damit sie zu einer Hill-Diskriminante gehört. Dabei präsentieren wir die vollständige Parametrisierung der Menge aller Hill-Diskriminanten durch eine Klasse **IC** von Riemannschen Flächen. Die Klasse **IC** besteht aus allen Riemannschen Flächen, die einfach zusammenhängend sind und bei denen alle Verzweigungspunkte endliche Ordnung haben. Die Verzweigungspunkte werden zusätzlich in die Nähe von $(-1)^n$ projiziert und eine Riemannsche Fläche $S \in \mathbf{IC}$ besteht aus Blättern S_n , $n \in \mathbb{Z}$, wobei die Verzweigungspunkte auf S_n und S_{-n} zusammenfallen und gemeinsame Verzweigungsordnung haben. Wir werden zeigen, wie man startend bei einer Hill-Diskriminante zu einer Riemannschen Fläche aus **IC** kommt, diese Konstruktion werden wir ausführlich darstellen. Umgekehrt werden wir den Beweis von Tkachenko aus [36] andeuten, wie man aus einer Riemannschen Fläche vom Typ **IC** eine Hill-Diskriminante erhält. Der ausführliche Beweis würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Im Anhang stellen wir im ersten Teil den Satz von Rouché dar, der eine Aussage über das Nullstellenverhalten zweier Funktionen f und g trifft. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra angeben und das Theorem von Hurwitz beweisen. Im zweiten Teil des Anhangs beschäftigen wir uns mit ganzen Funktionen, dies sind holomorphe Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} . Zunächst suchen wir eine Produktdarstellung von ganzen Funktionen, die analog zur Linearfaktordarstellung ist. Das Problem, das dabei entsteht ist, dass möglicherweise unendlich viele Nullstellen auftreten. Die Darstellung folgt aus den Faktorisierungssätzen von Weierstraß und Hadamard. Wir definieren zusätzlich noch die Begriffe Rang, Geschlecht und Ordnung einer ganzen Funktion. Außerdem beweisen wir einige Abschätzungen über unendliche Produkte, die wir in den ersten beiden Kapiteln benötigen.

Wendet man sich der bisher erschienenen Literatur zu, so wurden meistens nur reellwertige Potentiale betrachtet, diese Theorie ist inzwischen jedoch fast vollkommen erschöpft. Ein sehr gutes Werk über das Sturm-Liouville Problem und die allgemeine Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren ist [21] von Levitan und Sargsjan. Als Pionierarbeit des inversen Problems reellwertiger Potentiale ist sicherlich die Arbeit von Borg [3] im Jahre 1946 zu nennen. Hochstadt vereinfachte in [14] die Beweise von Borg und untersuchte in [13] bereits die Hill-Diskriminante. Ein Buch, das sich ausführlich mit der Hill-Diskriminante beschäftigt, ist [23] von Magnus und Winkler. Im Laufe der 70er Jahre entstanden die Hauptwerke der inversen Spektraltheorie, hier sind vor allem Dubrovin, Isaacson, Its, Lax, Matveev, McKean, Novikov, Trubowitz und van Moerbeke zu nennen, die in einigen Arbeiten das Problem untersuchten ([5],[15],[16],[17],[19],[20],[25],[26],[27],[29]). Mit dem Fall von unendlich vielen Verzweigungspunkten befassten sich das erste Mal McKean und Trubowitz in [25]. In neueren Artikeln findet man hauptsächlich Abschätzungen für die Eigenwerte, siehe dazu Kaper und Mityagin [18], einige Arbeiten von Korotyaev und Kargaev, sowie Grébert [12]. Ein Standardwerk für die inverse Spektraltheorie bei reellen Potentialen ist [30] von Pöschel und Trubowitz, die die komplette Untersuchung von Eigenwerten mit Dirichletrandbedingungen aufgeschrieben haben. Zudem findet man in diesem Buch eine komplette Analyse des inversen Problems bei Dirichletrandbedingungen und reellen Potentialen. Mit dem inversen Problem bei komplexen Potentialen beschäftigen sich die Arbeiten [1] und [2] von Birnir, sowie [36] von Tkachenko. Außerdem sind einige Arbeiten von Gesztesy, Weikard und Holden zu nennen, z.B. [9], [10], [24], die sich ausführlich mit komplexen Potentialen und der KdV-Hierarchie beschäftigen. In [9] wurde das erste Mal eine Spurformel für allgemeine komplexe Potentiale bewiesen. Viele Artikel beschäftigen sich auch mit dem Isospektralproblem bei endlich vielen Bandlücken, hier sind [11] von Gesztesy und Weikard, sowie [39], [40] und [41] von Treibich und Verdier zu nennen. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie komplexwertiger Potentiale dargestellt und an einigen Stellen erweitert, dies betrifft sowohl die Spektraltheorie als auch das inverse Problem.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Martin Schmidt für seine Unterstützung bedanken. Ich habe während dieser Arbeit viel gelernt, wozu vor allem die Gespräche einen Großteil beigetragen haben. Seine Anregungen und stets vorhandene, konstruktive Gesprächsbereitschaft haben wesentlich bei der erfolgreichen Fertigstellung dieser Arbeit geholfen.

1. Spektraltheorie des Schrödingeroperators

In diesem Kapitel werden wir die Spektraltheorie des eindimensionalen Schrödingeroperators

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (1.1)$$

entwickeln. Wir suchen eine Darstellung der Fundamentallösung der Gleichung $Ly = \lambda y$. Dazu werden wir zwei Funktionen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ einführen, von denen wir zeigen werden, dass sie ein Fundamentalsystem bilden. Im zweiten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Hill-Diskriminante $\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}(y_1(1, \lambda, q) + y_2'(1, \lambda, q))$ und werden ihre analytischen Eigenschaften untersuchen. Haben wir die Eigenschaften der Diskriminante, so wenden wir uns den Eigenschaften der Fundamentallösung zu. Anschließend betrachten wir das Dirichlet-Randwertproblem $y(0) = y(1) = 0$ und werden die asymptotische Lage der Dirichleteigenwerte bestimmen.

1.1. Fundamentallösung

In dem Standardwerk [30] zu diesem Thema von Pöschel und Trubowitz wurde eine schöne Darstellung gefunden, diese werden wir auch benutzen, jedoch an einigen Stellen erweitern. Wir betrachten den eindimensionalen Schrödingeroperator

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

und die dazugehörige Hillgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \quad (1.2)$$

$q(x)$ ist eine komplexwertige quadratintegrierbare Funktion mit Periode 1, den Raum aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit $L_{\mathbb{C}}^2[0, 1]$. Als Abkürzung dafür benutzen wir

$L^2_{\mathbb{C}}$, wenn klar ist, dass es sich um periodische Funktionen mit Periode 1 handelt. Wir bezeichnen $q(x)$ auch als *Potential*, im Fall $q(x) \equiv 0$ nennen wir es *freies Potential*. λ ist ein komplexer Parameter. Gesucht sind nun Lösungen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ der Gleichung (1.2) zu den Anfangsbedingungen

$$y_1(0, \lambda, q) = y_2'(0, \lambda, q) = 1,$$

$$y_1'(0, \lambda, q) = y_2(0, \lambda, q) = 0.$$

Teilweise werden wir Parameter der Funktionen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ weglassen, um die Schreibweise abzukürzen. Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ ein Fundamentalsystem bilden, dass wir also jede andere Lösung von (1.2) schreiben können als

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

Haben wir dies erreicht, dann können wir durch Analyse des Fundamentalsystems das Verhalten der Gleichung (1.2) bestimmen. Zunächst ein vorbereitendes Lemma, das uns eine allgemeine Lösung des inhomogenen Problems von (1.2) im Fall des freien Potentials liefert.

Lemma 1.1. *Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Die eindeutige Lösung von*

$$-y'' = \lambda y - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

zu den Anfangswerten

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

ist gegeben durch

$$y(x) = ac_{\lambda}(x) + bs_{\lambda}(x) + \int_0^x s_{\lambda}(x-t)f(t)dt.$$

Hier sind $c_{\lambda}(x)$ und $s_{\lambda}(x)$ abkürzende Bezeichnungen für

$$c_{\lambda}(x) = \cos \sqrt{\lambda}x, \quad s_{\lambda}(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}.$$

Beweis. Wir betrachten das Integral

$$y_f(x) = \int_0^x s_{\lambda}(x-t)f(t)dt.$$

Wenden wir das Additionstheorem für die Sinusfunktion an, so folgt

$$y_f(x) = s_\lambda(x) \int_0^x c_\lambda(t) f(t) dt - c_\lambda(x) \int_0^x s_\lambda(t) f(t) dt.$$

y_f ist absolut stetig, da $c_\lambda f$ und $s_\lambda f$ integrierbar sind. Es gilt somit fast überall

$$y'_f(x) = c_\lambda(x) \int_0^x c_\lambda(t) f(t) dt - \lambda s_\lambda(x) \int_0^x s_\lambda(t) f(t) dt.$$

Die Gleichheit gilt sogar überall, da die rechte Seite stetig in x ist. Eine weitere Ableitung liefert

$$y''_f(x) = -\lambda s_\lambda(x) \int_0^x c_\lambda(t) f(t) dt + \lambda c_\lambda(x) \int_0^x s_\lambda(t) f(t) dt + f(x).$$

Somit ist y_f eine Lösung von $-y'' = \lambda y - f(x)$ zu den Anfangswerten

$$y_f(0) = 0, \quad y'_f(0) = 0.$$

Da c_λ und s_λ die homogene Gleichung ($a = b = 0$) lösen, ist

$$y(x) = ac_\lambda(x) + bs_\lambda(x) + y_f(x)$$

eine Lösung von $-y'' = \lambda y - f(x)$ zu den Anfangswerten $y(0) = a, y'(0) = b$.

Es ist nun noch die Eindeutigkeit zu zeigen, dazu sei \tilde{y} eine andere Lösung der inhomogenen Gleichung mit den gleichen Anfangswerten. Dann erfüllt die Differenz $v = y - \tilde{y}$ die Differentialgleichung

$$-v'' = \lambda v, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

Es folgt $v \equiv 0$ und somit $y = \tilde{y}$. □

Um $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ zu konstruieren, werden wir sie als Potenzreihen in q entwickeln. Wir beginnen mit $y_1(x, \lambda, q)$ und nehmen an, dass wir

$$y_1(x, \lambda, q) = C_0(x, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

schreiben können mit

$$C_n(x, \lambda, q) = C_n(x, \lambda, q_1, \dots, q_n)|_{q_1=\dots=q_n=q}$$

Hierbei ist $C_n(x, \lambda, q_1, \dots, q_n)$ für jedes x und λ eine beschränkte, multilineare symmetrische Form in $(L^2_{\mathbb{C}})^n$. C_1 ist also linear in q , C_2 quadratisch in q usw. Wenn man wie bei einer Taylorentwicklung $q = 0$ setzt, lässt sich der nullte Term bestimmen. Dann liefert uns Lemma 1.1 mit $f(x) = 0$ und $a = 1$, $b = 0$

$$C_0(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x.$$

Wir leiten nun die Potenzreihe für y_1 zweimal nach x ab¹, schreiben die Differentialgleichung aus und vergleichen die Terme, die homogen vom gleichen Grad in q sind. Dadurch ergibt sich für alle C_n die Differentialgleichung

$$-C_n'' = \lambda C_n - q C_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Als nächstes bestimmen wir die Anfangswerte für diese Differentialgleichung. Da

$$y_1(0) = 1 + \sum_{n \geq 1} C_n(0) = 1$$

und

$$y_1'(0) = \sum_{n \geq 1} C_n'(0) = 0$$

für alle q gilt, muss die obige Differentialgleichung die Anfangswerte

$$C_n(x, \lambda, q) = 0, \quad C_n'(x, \lambda, q) = 0, \quad n \geq 1$$

haben. Dieses Anfangswertproblem haben wir in Lemma 1.1 behandelt, also ist

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)C_{n-1}(t, \lambda, q)dt, \quad n \geq 1$$

die eindeutige Lösung. Nun berechnen wir explizit die ersten beiden C_n . Durch Einsetzen von $C_0(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x = c_\lambda(x)$ erhalten wir C_1 als

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda, q) &= \int_0^x s_\lambda(x-t_1)q(t_1)C_0(t_1, \lambda)dt_1 \\ &= \int_0^x c_\lambda(t_1)s_\lambda(x-t_1)q(t_1)dt_1 \end{aligned}$$

¹Bezüglich q darf nicht die Produktregel angewandt werden, da q eine eigenständige Variable ist.

und durch erneutes Einsetzen C_2 als

$$\begin{aligned}
 C_2(x, \lambda, q) &= \int_0^x s_\lambda(x - t_2)q(t_2)C_1(t_2, \lambda, q)dt_2 \\
 &= \int_0^x s_\lambda(x - t_2)q(t_2) \left(\int_0^{t_2} c_\lambda(t_1)s_\lambda(t_2 - t_1)q(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\
 &= \iint_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^2 [s_\lambda(t_{i+1} - t_i)q(t_i)] dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

Führt man dieses Verfahren per Induktion fort, so ergibt sich eine geschlossene Formel für alle C_n .

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \dots \int c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1} - t_i)q(t_i)] dt_1 \dots dt_n \quad (1.3)$$

Wir haben also y_1 als formale Potenzreihe

$$y_1(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

in q entwickelt. Wenn wir die obige Argumentation für $y_2(x, \lambda, q)$ wiederholen, dann können wir auch y_2 als formale Potenzreihe

$$y_2(x, \lambda, q) = s_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} S_n(x, \lambda, q)$$

in q schreiben mit

$$S_n(x, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \dots \int s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1} - t_i)q(t_i)] dt_1 \dots dt_n. \quad (1.4)$$

Diese Berechnungen waren bisher nur rein formaler Natur, im folgendem Theorem zeigen wir, dass sie auch gegen eine Lösung der Gleichung (1.2) konvergieren. Um von Konvergenz sprechen zu können, müssen wir zuerst eine Norm definieren.

Definition 1.2. Für $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ sei

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Dies sind die Standarddefinitionen für das innere Produkt und die Norm auf $L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$.

Theorem 1.3. Die formalen Potenzreihen

$$y_1(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

und

$$y_2(x, \lambda, q) = s_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} S_n(x, \lambda, q)$$

konvergieren auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung von $-y'' + q(x)y = \lambda y$ zu den Anfangswerten

$$y_1(0, \lambda, q) = y_2'(0, \lambda, q) = 1,$$

$$y_1'(0, \lambda, q) = y_2(0, \lambda, q) = 0.$$

Außerdem gelten die Integralgleichungen

$$y_1(x, \lambda, q) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_1(t, \lambda, q) dt, \quad (1.5)$$

$$y_2(x, \lambda, q) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_2(t, \lambda, q) dt \quad (1.6)$$

und die Abschätzungen

$$|y_1(x, \lambda, q)|, |y_2(x, \lambda, q)| \leq \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x} \right).$$

Beweis. Wir beweisen hier nur die Aussage für y_1 , der Beweis für y_2 verläuft analog. Mit Hilfe der Abschätzung

$$c_\lambda(x) \leq \frac{1}{2} \left| e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x} \right| \leq \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x \right)$$

erhalten wir für $x \in [0, 1]$

$$|s_\lambda(x)| = \left| \int_0^x c_\lambda(t) dt \right| \leq \int_0^x \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|t) dt \leq \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x).$$

Der n -te Term in der Potenzreihenentwicklung von y_1 kann damit abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} |C_n(x, \lambda, q)| &\leq \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \cdots \int |c_\lambda(t_1)| \prod_{i=1}^n |s_\lambda(t_{i+1} - t_i)q(t_i)| dt_1 \dots dt_n \\ &\leq \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x) \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \cdots \int \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Der Wert des Integrals verändert sich unter Permutationen von t_1, \dots, t_n nicht. Die Vereinigung aller permutierten Integrationsbereiche ist $[0, x]^n$, somit folgt

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \cdots \int \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \dots dt_n &= \frac{1}{n!} \int_{[0, x]^n} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \dots dt_n \\ &= \frac{1}{n!} \left[\int_0^x |q(t)| dt \right]^n \\ &\leq \frac{1}{n!} (\|q\| \sqrt{x})^n. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Schwarzschen Ungleichung. Wir erhalten also die Abschätzung

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{n!} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x) (\|q\| \sqrt{x})^n.$$

Dies zeigt, dass die formale Potenzreihe

$$y_1(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L_{\mathbb{C}}^2$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert. Benutzt man nun noch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\|q\| \sqrt{x})^n = \exp(\|q\| \sqrt{x}),$$

so erhalten wir die Abschätzung für y_1 . Als nächstes beobachten wir

$$\begin{aligned}
 y_1(x, \lambda, q) &= c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q) \\
 &= c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)C_{n-1}(t, \lambda, q)dt \\
 &= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t) \left(\sum_{n \geq 1} C_{n-1}(t, \lambda, q) \right) dt \\
 &= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_1(t, \lambda, q)dt.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten, da wir aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz Integration und Summation vertauschen können. Somit ist die Integralgleichung für y_1 bewiesen. Es folgt wie im Beweis von Lemma 1.1, dass y_1 eine Lösung von $-y'' + q(x)y = \lambda y$ zu den richtigen Anfangswerten ist.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass \tilde{y}_1 eine weitere Lösung der Gleichung (1.2) zu den gleichen Anfangswerten ist. Aus Lemma 1.1 folgt

$$\tilde{y}_1(x) = c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\tilde{y}_1(t)dt.$$

Dann erfüllt die Differenz $v(x) = y_1(x) - \tilde{y}_1(x)$ die Gleichung

$$v(x) = \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)v(t)dt$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}
 |v(x)|^2 &\leq \int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt \int_0^x |v(t)|^2 dt \\
 &\leq c \int_0^x |v(t)|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Hier ist $c := \|q\| \max\{|s_\lambda^2(t)| \mid 0 \leq t \leq 1\}$ und wir haben wieder die Schwarzsche Ungleichung benutzt. Es folgt, dass die nichtnegative Funktion $e^{-cx} \int_0^x |v(t)|^2 dt$ eine nicht-positive Ableitung auf $[0, 1]$ hat. Da sie bei 0 verschwindet, muss sie auf $[0, 1]$ identisch verschwinden. Somit gilt $v(x) \equiv 0$, was die Eindeutigkeit beweist. \square

Wenn wir die Integralgleichungen iterieren und an der Stelle $x = 1$ auswerten, so erhalten wir

$$y_1(1, \lambda, q) = \cos \sqrt{\lambda} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^1 q(s) ds + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (1.7)$$

$$y_2(1, \lambda, q) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{2\lambda} \int_0^1 q(s) ds + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right), \quad (1.8)$$

$$y_1'(1, \lambda, q) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{2} \int_0^1 q(s) ds + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad (1.9)$$

$$y_2'(1, \lambda, q) = \cos \sqrt{\lambda} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^1 q(s) ds + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (1.10)$$

Nun haben wir eine Fundamentallösung der Hillgleichung gefunden. Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 1.4. Die Fundamentallösung ist in Matrixschreibweise

$$Y(x, \lambda, q) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda, q) & y_2(x, \lambda, q) \\ y_1'(x, \lambda, q) & y_2'(x, \lambda, q) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $M(\lambda) = Y(1, \lambda, q)$ heißt **Monodromie**.

Für das folgende Theorem brauchen wir einen Hilbertraum, der auch gewisse Ableitungen zulässt.

Definition 1.5. Für $k \geq 0$ sei $H_{\mathbb{C}}^k = H_{\mathbb{C}}^k[0, 1]$ der Hilbertraum aller komplexwertigen Funktionen auf $[0, 1]$, die k Ableitungen in $L_{\mathbb{C}}^2$ besitzen. Insbesondere ist $L_{\mathbb{C}}^2 = H_{\mathbb{C}}^0$.

Theorem 1.6 (Analytische Eigenschaften).

(a) Für jedes $x \in [0, 1]$ sind

$$y_j(x, \lambda, q), \quad y'_j(x, \lambda, q), \quad j = 1, 2$$

ganze Funktionen auf $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$.

(b) Die Lösung

$$y_j(\cdot, \lambda, q), \quad j = 1, 2$$

ist als Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $H^2_{\mathbb{C}}$ analytisch.

Beweis. (a) Wir führen den Beweis wieder nur für y_1 , der Beweis für y_2 verläuft analog. Der n -te Term in der Potenzreihenentwicklung ist gegeben durch

$$C_n(x, \lambda, q) = \int \cdots \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1} = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n s_\lambda(t_{i+1} - t_i) \prod_{i=1}^n q(t_i) dt_1 \cdots dt_n.$$

Die ersten beiden Terme im Integranden sind ganze Funktionen in λ . Der Ausdruck ist also für jedes x stetig differenzierbar nach λ und q auf ganz $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ und somit eine ganze Funktion in λ und q . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Summe aller dieser Terme auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$, wie in Theorem 1.3 gezeigt wurde, ist y_1 eine ganze Funktion von λ und q . Die Integralgleichung aus Theorem 1.3 liefert uns

$$y'_1(x, \lambda, q) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t) q(t) y_1(t, \lambda, q) dt.$$

Also ist die Ableitung y'_1 für jedes x stetig differenzierbar und damit ebenfalls ganz.

(b) Jeder Term C_n sei nun eine Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $C_{\mathbb{C}}$, den Raum aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist jeder Term stetig differenzierbar und somit auch ganz. Dies gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz und der Integralgleichung ebenfalls für y_1 und y'_1 . Es folgt, dass y_1 und y'_1 auch als Abbildungen von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $L^2_{\mathbb{C}}$ analytisch sind, da die Supremumsnorm stärker ist als die L^2 -Norm. Wegen der Differentialgleichung

$$y''_1 = (q - \lambda)y_1$$

ist y''_1 im gleichen Sinne analytisch. Dies zeigt, dass y_1 eine analytische Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $H^2_{\mathbb{C}}$ ist. Der Beweis für y_2 verläuft analog. \square

Definition 1.7. Die **Wronski-Determinante** zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist die Funktion

$$[f, g] := fg' - f'g.$$

Das nächste Theorem liefert uns eine wichtige Aussage, die wir oft benutzen werden.

Theorem 1.8 (Wronski-Identität).

$$[y_1, y_2] = 1$$

Beweis. Es gilt fast überall

$$\begin{aligned} [y_1, y_2]' &= (y_1y_2' - y_1'y_2)' \\ &= y_1y_2'' - y_1''y_2 \\ &= y_1(q - \lambda)y_2 - (q - \lambda)y_1y_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

also auch

$$[y_1, y_2](x) = [y_1, y_2](0) = 1$$

wegen der Stetigkeit überall. \square

Wir können nun Lemma 1.1 verallgemeinern auf das inhomogene Problem der Hillgleichung.

Theorem 1.9. Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Dann existiert eine eindeutige Lösung der inhomogenen Gleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

zu den Anfangswerten

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b.$$

Die Lösung lässt sich schreiben als

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x) + \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))f(t)dt.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Lemma 1.1. Man muss nur $s_\lambda(x-t) = s_\lambda(x)c_\lambda(t) - s_\lambda(t)c_\lambda(x)$ durch $y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)$ ersetzen und die Wronski-Identität benutzen. \square

Durch das folgende Korollar wird nun das Anfangswertproblem der Hillgleichung gelöst.

Korollar 1.10. *Jede Lösung der Hillgleichung ist eindeutig gegeben durch*

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

Besitzt außerdem eine Lösung eine doppelte Nullstelle in $[0, 1]$, so verschwindet sie identisch.

Beweis. Wenn man $f(x) \equiv 0$ setzt, folgt die erste Behauptung direkt aus dem obigen Theorem. Für die zweite Behauptung betrachten wir an einer doppelten Nullstelle x_0 , also $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Dann gilt $y(0) = y'(0) = 0$, da die Matrix aufgrund der Wronski-Identität nicht singulär ist. \square

Definition 1.11. *Bei gegebenen Randbedingungen heißt ein Wert λ , für den eine Lösung der Hillgleichung existiert, **Eigenwert**. Die dazugehörige Funktion $y(x)$ heißt **Eigenfunktion**.*

Wir können y_1 und y_2 als Verallgemeinerungen der Funktionen $\cos \sqrt{\lambda}x$ und $\sin \sqrt{\lambda}x/\sqrt{\lambda}$ ansehen. Für großes λ können wir sogar asymptotische Abschätzungen angeben.

Theorem 1.12 (Abschätzungen). *Auf $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \left| y_1(x, \lambda, q) - \cos \sqrt{\lambda}x \right| &\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x} \right), \\ \left| y_2(x, \lambda, q) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| y_1'(x, \lambda, q) + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \right| &\leq \|q\| \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x} \right), \\ \left| y_2'(x, \lambda, q) - \cos \sqrt{\lambda} x \right| &\leq \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|} \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$\left| y_1(x, \lambda, q) - \cos \sqrt{\lambda} x \right| \leq \sum_{n \geq 1} |C_n(x, \lambda, q)|.$$

Jeder Term C_n enthält einen Faktor $s_\lambda(x - t_n)$, der beschränkt ist durch

$$|s_\lambda(t)| = \frac{|\sin \sqrt{\lambda} t|}{|\sqrt{\lambda}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| t \right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Andererseits können wir wie in Theorem 1.3 vorgehen um die Abschätzung

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x \right) \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!}$$

zu erhalten. Wenn wir diese Majoranten summieren und den Term für $n = 0$ hinzunehmen, erhalten wir die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung wird bewiesen, indem man die Terme $s_\lambda(t_1)$ und $s_\lambda(x - t_n)$ in S_n wie oben abschätzt. Durch Ableiten der Integralgleichung für y_1 ergibt sich

$$y_1'(x, \lambda, q) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t) q(t) y_1(x, \lambda, q) dt.$$

Aus der Abschätzung von Theorem 1.3 und der Ungleichung $|c_\lambda(t)| \leq \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| t \right)$ folgt

$$\begin{aligned} \left| y_1'(x, \lambda, q) + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \right| &\leq \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x \right) \int_0^x |q(t)| e^{\|q\| \sqrt{t}} dt \\ &\leq \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x} \right) \int_0^x |q(t)| dt \\ &\leq \|q\| \exp \left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x} \right). \end{aligned}$$

Dies beweist die dritte Ungleichung. Um die vierte zu beweisen zeigt man, dass

$$|y_2(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}\right)$$

gilt und wiederholt die obigen Schritte. \square

Die gleichen Abschätzungen werden wir mit allerdings anderer Schreibweise später erneut beweisen.

Der obige Beweis hat gezeigt, dass

$$y_1(x, \lambda, q) = \cos \sqrt{\lambda}x + \sum_{n=1}^N C_n(x, \lambda) + O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|)}{|\sqrt{\lambda}|^{N+1}}\right)$$

gilt. Die Abschätzung ist in dieser Form nicht sehr nützlich, da C_n ziemlich kompliziert ist. Eine kleine Verbesserung ist möglich, wenn wir trigonometrische Identitäten benutzen. Benutzen wir zum Beispiel $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda, q) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t) \cos(\sqrt{\lambda}t) q(t) dt \\ &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-2t) q(t) dt. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen kann man nichts besseres erreichen. Besitzt q jedoch eine oder mehrere Ableitungen, dann können wir auch noch partiell integrieren. Bei einer vorhandenen Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda, q) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t) dt + \frac{\cos \sqrt{\lambda}x}{4\lambda} (q(x) - q(0)) \\ &\quad - \frac{1}{4\lambda} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-2t) q'(t) dt, \end{aligned}$$

wobei der letzte Term für $|\lambda| \rightarrow \infty$ von der Ordnung $o\left(\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x/|\lambda|)\right)$ ist. Besitzt q eine zweite Ableitung in $L^2_{\mathbb{C}}$, dann können wir noch einmal partiell integrieren und den

dritten Term ersetzen durch

$$-\frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{8\sqrt{\lambda}^3} (q'(x) + q'(0)) - \frac{1}{8\sqrt{\lambda}^3} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(q - 2t)q'' dt.$$

Der letzte Term ist nun $o\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x)/(|\sqrt{\lambda}|^3)}{|\sqrt{\lambda}|^3}\right)$ für $|\lambda| \rightarrow \infty$. In der obigen Entwicklung sind die Terme nach inversen Potenzen von λ geordnet. Jeder Term (außer dem Fehlerterm) ist ein Produkt von Ausdrücken in λ und q , wenn wir die x -Abhängigkeit ignorieren. Somit ist es natürlich, die ersten N Koeffizienten von C_n abzuspalten und die Terme zu sammeln, die die gleiche Potenz von $1/\lambda$ enthalten. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist eine formale asymptotische Entwicklung von $y_1(x, \lambda, q)$ in inversen Potenzen von λ . Wir beweisen nun ein Theorem für zweimal differenzierbare Potentiale.

Theorem 1.13. Für $q \in H_{\mathbb{C}}^2$ gilt

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda, q) = & \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}}Q(x) + \frac{\cos \sqrt{\lambda}x}{4\lambda} \left(q(x) - q(0) - \frac{1}{2}Q(x)^2 \right) \\ & + O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^3} \right) \end{aligned}$$

mit

$$Q(x) = \int_0^x q(t)dt.$$

Beweis. Wir hatten bereits die Abschätzung

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda, q) = & \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t)dt + \frac{\cos \sqrt{\lambda}x}{4\lambda} (q(x) - q(0)) \\ & - \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{8\sqrt{\lambda}^3} (q'(x) + q'(0)) - \frac{1}{8\sqrt{\lambda}^3} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(q - 2t)q'' dt. \end{aligned}$$

Auf die gleiche Art kann man nun auch eine Abschätzung für C_2 erhalten.

$$\begin{aligned}
 C_2(x, \lambda, q) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2) \int_0^{t_2} \sin \sqrt{\lambda}(t_2-t_1) \cos \sqrt{\lambda}t_1q(t_1)dt_1dt_2 \\
 &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2) \sin \sqrt{\lambda}t_2 \int_0^{t_2} q(t_1)dt_1dt_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2) \int_0^{t_2} \sin \sqrt{\lambda}(t_2-2t_1)q(t_1)dt_1dt_2 \\
 &= I + II.
 \end{aligned}$$

Benutzen wir nun die Gleichung $2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ und integrieren partiell, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{\cos \sqrt{\lambda}x}{4\lambda} \int_0^x q(t_2) \int_0^{t_2} q(t_1)dt_1dt_2 \\
 &\quad + \frac{1}{4\lambda} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-2t_2)q(t_2) \int_0^{t_2} q(t_1)dt_1dt_2 \\
 &= -\frac{\cos \sqrt{\lambda}x}{8\lambda} \left(\int_0^x q(t)dt \right)^2 + O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^3} \right).
 \end{aligned}$$

Eine weitere partielle Integration liefert

$$II = \left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x)}{|\lambda|^2} \right).$$

Fassen wir nun die Terme zusammen, so erhalten wir die Abschätzung für $y_1(x, \lambda, q)$. \square

Analog beweist man für $y_2(x, \lambda, q)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 y_2(x, \lambda, q) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos \sqrt{\lambda}x}{2\lambda}Q(x) + \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{4\sqrt{\lambda}^3} \left(q(x) + q(0) - \frac{1}{2}Q(x)^2 \right) \\
 &\quad + O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x)}{|\lambda|^2} \right).
 \end{aligned}$$

1.2. Hill-Diskriminante

Nun führen wir einen wichtigen Begriff ein, der uns bei einigen Untersuchungen hilft. Außerdem wird er später einen Übergang zu den Riemannschen Flächen darstellen.

Definition 1.14. Die Funktion

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2} (y_1(1, \lambda, q) + y_2'(1, \lambda, q)) \quad (1.11)$$

heißt **Hill-Diskriminante**.

Als Erstes geben wir eine Formel für die Ableitung der Hill-Diskriminante nach λ an.

Lemma 1.15. Es gilt

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Delta(\lambda)}{\partial \lambda} &= (y_1(1, \lambda, q) - y_2'(1, \lambda, q)) \int_0^1 y_1(x) y_2(x) dx \\ &\quad - y_2(1, \lambda, q) \int_0^1 y_1(x)^2 dx + y_1'(1, \lambda, q) \int_0^1 y_2(x)^2 dx. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Beweis. Als abkürzende Schreibweise führen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= z_1, & \frac{\partial y_2(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= z_2, \\ \frac{\partial y_1'(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= z_1', & \frac{\partial y_2'(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= z_2' \end{aligned}$$

ein. Wir leiten $-y'' + qy = \lambda y$ nach λ ab und erhalten (für $y = y_1$ bzw. $y = y_2$)

$$\begin{aligned} z_1'' + (\lambda - q)z_1 &= -y_1(x, \lambda), \\ z_2'' + (\lambda - q)z_2 &= -y_2(x, \lambda). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Die allgemeine Formel für die Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

zweiter Ordnung in Ausdrücken der Lösung der homogenen Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
 z_1(x) &= y_1(x, \lambda) \int_0^x y_2(t)y_1(t)dt - y_2(x, \lambda) \int_0^x y_1(t)^2 dt, \\
 z_1'(x) &= y_1'(x, \lambda) \int_0^x y_2(t)y_1(t)dt - y_2'(x, \lambda) \int_0^x y_1(t)^2 dt, \\
 z_2(x) &= y_1(x, \lambda) \int_0^x y_2(t)^2 dt - y_2(x, \lambda) \int_0^x y_1(t)y_2(t)dt, \\
 z_2'(x) &= y_1'(x, \lambda) \int_0^x y_2(t)^2 dt - y_2'(x, \lambda) \int_0^x y_1(t)y_2(t)dt.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Die Funktionen z_1 und z_2 sind die Lösungen zu den Anfangswerten $z_1(0) = z_1'(0) = 0$ und $z_2(0) = z_2'(0) = 0$. Da $z_1 = \partial y_1 / \partial \lambda$ usw. ist und die Anfangswerte von y_1 und y_2 unabhängig von λ sind, sind es die richtigen Lösungen. Die Gleichung (1.12) folgt dann direkt, wenn wir $x = 1$ setzen. \square

Nun berechnen wir auch noch $\partial^2 \Delta / \partial \lambda^2$. Dazu leiten wir (1.12) nach λ ab und benutzen (1.14) für $x = 1$. Somit erhalten wir die Ableitungen von $\partial z_1 / \partial \lambda$ usw. Nutzen wir nun noch die Dirichlet-Randbedingungen aus, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} = \left[\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx \right]^2 - \int_0^1 y_1(x)^2 dx \int_0^1 y_2(x)^2 dx \tag{1.15}$$

als Formel für die zweite Ableitung von Δ nach λ .

Theorem 1.16. *Die Funktion $\Delta(\lambda)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung $1/2$, d.h. es existiert eine Konstante M , so dass*

$$|\Delta(\lambda)| \exp(-M\sqrt{|\lambda|}) \tag{1.16}$$

für alle λ beschränkt ist.

Beweis. Die Summenentwicklung für die Hill-Diskriminante ist

$$\Delta(\lambda) = \sum_{n \geq 0} (C_n(1, \lambda, q) + S_n'(1, \lambda, q)).$$

Dabei ist $S'_0(x) = \cos \sqrt{\lambda}x$ und

$$S'_n(x, \lambda, q) = - \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t)q(t)S'_{n-1}(t, \lambda, q)dt.$$

Für positive, reelle x gilt

$$\begin{aligned} |C_0(x)| &= |\cos(\sqrt{\lambda}x)| = \frac{1}{2} \left| \left(e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(e^{|\sqrt{\lambda}|x} + e^{|\sqrt{\lambda}|x} \right) = e^{|\sqrt{\lambda}|x} \end{aligned}$$

und $|S_0| \leq xe^{|\sqrt{\lambda}|x}$. Sei nun M^* eine positive Konstante, so dass $|q(x)| \leq M^*$ für reelles x gilt. Dann erhalten wir per Induktion aus den Summenentwicklungen für C_n und S_n , sowie

$$|\sin \sqrt{\lambda}(x-t)| \leq |\sqrt{\lambda}|(x-t)e^{|\sqrt{\lambda}|(x-t)}$$

die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |C_n(x, \sqrt{\lambda})| &\leq e^{|\sqrt{\lambda}|x} \frac{(M^*x^2)^n}{(2n)!}, \\ |S_n(x, \sqrt{\lambda})| &\leq xe^{|\sqrt{\lambda}|x} \frac{(M^*x^2)^n}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Es gilt somit auch

$$|S'_n(x, \sqrt{\lambda})| \leq xe^{|\sqrt{\lambda}|x} \frac{(M^*x^2)^n}{(2n)!}.$$

Wir erhalten also für $|\Delta(\lambda)|$ die Abschätzung

$$|\Delta(\lambda)| \leq 2e^{|\sqrt{\lambda}|} \cosh(\sqrt{M^*}).$$

Dies zeigt, dass der Ausdruck (1.16) beschränkt ist, wenn wir $M = 1$ wählen. \square

Da eine ganze Funktion der Ordnung $1/2$ unendlich viele Nullstellen besitzt, wie in Satz B.18 bewiesen wird, folgt sofort ein Korollar.

Korollar 1.17. *Die Funktionen $\Delta(\lambda)+1$ und $\Delta(\lambda)-1$ haben unendlich viele Nullstellen.*

Das nächste Theorem liefert eine asymptotische Abschätzung von $\Delta(\lambda)$ für positive Werte von λ .

Theorem 1.18. Sei $q(x)$ so normiert, dass $\int_0^1 q(t)dt = 0$ gilt, dann folgt daraus für alle komplexen Werte von $\sqrt{\lambda}$ mit nichtnegativem Realteil

$$|\Delta(\lambda) - \cos \sqrt{\lambda}| \leq 2e^{|Im \sqrt{\lambda}|} \left(\exp \left(M/|\sqrt{\lambda}| \right) - 1 \right). \quad (1.17)$$

Hierbei ist M so gewählt, dass $|q(x)| < M$ gilt.

Beweis. Mit Induktion über n folgt ebenso wie im Beweis von Theorem 1.16

$$\begin{aligned} |C_n(x, \lambda, q)| &\leq e^{|Im \sqrt{\lambda}|x} M^n x^n |\sqrt{\lambda}|^{-n} / n!, \\ |S'_n(x, \lambda, q)| &\leq e^{|Im \sqrt{\lambda}|x} M^n x^n |\sqrt{\lambda}|^{-n} / n!. \end{aligned}$$

Wir müssen nur die Abschätzungen im Beweis von Theorem 1.16 ersetzen durch

$$|C_0(x)| \leq e^{|Im \sqrt{\lambda}|x}, \quad |S_0(x)| \leq x e^{|Im \sqrt{\lambda}|x}$$

und

$$\begin{aligned} |\cos \sqrt{\lambda}(x-t)| &\leq \exp |Im \sqrt{\lambda}|(x-t), \\ |\sin \sqrt{\lambda}(x-t)| &\leq \exp |Im \sqrt{\lambda}|(x-t). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\sqrt{\lambda}|\Delta(\lambda) - \cos \sqrt{\lambda}| \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt, müssen wir lediglich zeigen, dass

$$\lim_{\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} |C_1(1, \lambda, q) + S'_1(1, \lambda, q)| = 0$$

gilt, da für $n > 1$ und $\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$ die Funktionen $C_n(x, \lambda, q)$ und $S'_n(x, \lambda, q)$ von der Ordnung $O(1/\lambda)$ sind. Nun gilt wegen der Normalisierung von $q(x)$

$$\sqrt{\lambda} (C_1(1, \lambda, q) + S'_1(1, \lambda, q)) = - \int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda}) q(t) dt = 0.$$

□

Definition 1.19. Die Nullstellen von $\Delta(\lambda) - 1$ heißen **periodische** Eigenwerte der Hillgleichung. Wir bezeichnen sie mit ω_i für $i = 4n - 3, 4n - 2$, $n \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen von $\Delta(\lambda) + 1$ heißen **antiperiodische** Eigenwerte der Hillgleichung. Wir bezeichnen sie mit ω_i für $i = 4n - 1, 4n$, $n \in \mathbb{N}$.

Als eine weitere Abschätzung für die Hill-Diskriminante erhalten wir

Lemma 1.20. *Für beschränkte $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ gilt*

$$\Delta(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}(1 + O(1/\lambda)).$$

Im Speziellen gilt $|\Delta| > 1$ außerhalb der reellen Achse. Die Linien $\sqrt{\lambda} = a + ib$, auf denen Δ reell ist, haben die asymptotische Entwicklung $a = n\pi + c_1/b + c_2/b^2 + \dots$, $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Aus Theorem 1.18 erhalten wir die Ungleichung

$$|\Delta - \cos \sqrt{\lambda}| \leq \sqrt{2} \cosh b\Sigma,$$

mit $\sqrt{\lambda} = a + ib$ und $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \|q\|^n / |\sqrt{\lambda}|^n$. Mit wachsendem a und kleinem, festem b wird Σ klein und Δ gut abgeschätzt durch $\cos \sqrt{\lambda}$. Außerdem gilt für $|b| > \sinh^{-1} 2$ auch $|\Delta| \geq (|\sinh b| - \sqrt{2} \cosh b\Sigma) \geq \frac{1}{2} |\sinh b| > 1$ und entweder a oder $|b|$ sind so groß, dass $\Sigma \leq |\coth b|/2\sqrt{2}$ ist. Dies zeigt, dass $\Delta(\lambda)$ für großes $\sqrt{\lambda}$ die Werte ± 1 nicht annimmt, außer nahe an der reellen Achse, wo die Funktion aussieht wie $\cos \sqrt{\lambda}$. Nun betrachten wir die Linien, auf denen Δ reell ist.

$$\begin{aligned} \Delta &= \cos(a + ib)[1 + \alpha + i\beta] \\ &= (1 + \alpha) \cos a \cosh b + \beta \sin a \sinh b \\ &\quad + i[\beta \cos a \cosh b - (1 + \alpha) \sin a \sinh b]. \end{aligned}$$

Der Imaginärteil verschwindet für $\tan(a) = [\coth b]\beta/(1 + \alpha)$. Die obigen Abschätzungen liefern $|\tan a| \leq \coth b|\beta|/(1 - |\alpha|) \leq \frac{1}{2} \coth b\Sigma$ für b so groß, dass $|\alpha| \leq \Sigma \leq \frac{1}{2}$. Tatsächlich ist $\alpha = O(1/\lambda)$, aber dies brauchen wir nicht. Für großes $|b|$ impliziert dies, dass $|\tan a|$ klein ist, da für $|b| \rightarrow \infty$ der Ausdruck $|\coth b|$ gegen 1 geht. Deshalb ist $a = n\pi + \delta$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und kleinem δ . Nun betrachten wir $0 \leq |\tan a| = \tan(\pm\delta) \leq \frac{1}{2}(\coth b\Sigma)$. Für großes $|b|$ ist die rechte Seite klein und liegt in einem Intervall um den Ursprung, in dem \tan^{-1} wohldefiniert ist. Benutzt man die Taylorreihe von \tan^{-1} , so ergibt sich

$$0 \leq \pm\delta \leq \tan^{-1} \left[\frac{1}{2} \coth b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|q\|^n}{|\sqrt{\lambda}|^n} \right] \leq \frac{\coth b \|q\|}{2b} + O\left(\frac{1}{|b|^2}\right).$$

□

1.3. Eigenschaften der Fundamentallösung

Wir untersuchen nun die Abhängigkeit der Funktionen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ von dem Potential q . Durch die Konstruktion sind beide stetig bezüglich der starken Topologie auf $L^2_{\mathbb{C}}$. Es kommt heraus, dass sie sogar kompakt sind, das heißt stetig bezüglich der schwachen Topologie.

Theorem 1.21. *Konvergiert die Folge q_m schwach gegen q in $L^2_{\mathbb{C}}$, dann gilt*

$$y_j(x, \lambda, q_m) \rightarrow y_j(x, \lambda, q) \quad j = 1, 2$$

gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C}$. Dies bedeutet, dass y_1 und y_2 gleichmäßig kompakt auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C}$ sind.

Beweis. Wir betrachten zunächst nur y_1 . Sei q_m eine Folge, die schwach gegen q konvergiert. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit gilt

$$\|q\| \leq \sup_m \|q_m\| \leq M < \infty.$$

Auf einer beschränkten Teilmenge A von $[0, 1] \times \mathbb{C}$ gilt dann gleichmäßig

$$|C_n(x, \lambda, p)| \leq \frac{1}{n!} \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x\right) (\|p\| \sqrt{x})^n \leq c \frac{M^n}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Hierbei haben wir die Abschätzung für C_n aus Lemma 1.1 benutzt. Es gilt also

$$\begin{aligned} |y_1(x, \lambda, q_m) - y_1(x, \lambda, q)| &\leq \sum_{n=1}^N |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)| \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} (|C_n(x, \lambda, q_m)| + |C_n(x, \lambda, q)|) \\ &\leq \sum_{n=1}^N |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)| \\ &\quad + 2c \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \end{aligned}$$

gleichmäßig auf A . Die zweite Summe konvergiert gegen Null für N gegen unendlich. Also reicht es zu zeigen, dass jeder Term $C_n(x, \lambda, q_m)$ auf A gleichmäßig gegen $C_n(x, \lambda, q)$ konvergiert. Nun halten wir $n \geq 1$ fest und untersuchen die Funktion

$$\Delta_m(x, \lambda) = C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q).$$

Diese Funktion lässt sich auch schreiben als

$$\Delta_m(x, \lambda) = \left\langle p_{x, \lambda}, \prod_{i=1}^n \bar{q}_m(t_i) - \prod_{i=1}^n \bar{q}(t_i) \right\rangle$$

mit

$$p_{x, \lambda}(t_1, \dots, t_n) = c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n s_\lambda(t_{i+1} - t_i) \mathbf{1}_{\{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x\}}$$

und $\mathbf{1}_{\{\dots\}}$ als Indikatorfunktion der Menge $\{\dots\}$. Das innere Produkt bezieht sich auf den Raum $L_{\mathbb{C}}^2([0, 1]^n)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\sup_A |\Delta_m(x, \lambda)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad m \rightarrow \infty$$

gilt. Wegen der Stetigkeit wird das Supremum von $|\Delta_m(x, \lambda)|$ für jedes m in einem Punkt (x_m, λ_m) angenommen, der im kompakten Abschluss von A liegt. Äquivalent dazu können wir also zeigen, dass

$$|\Delta_m(x_m, \lambda_m)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad m \rightarrow \infty$$

gilt. Ist dies nicht der Fall, dann können wir durch den Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass (x_m, λ_m) gegen (x^*, λ^*) konvergiert und zusätzlich

$$|\Delta_m(x_m, \lambda_m)| \geq \delta > 0$$

gilt. Aufgrund des Theorems der beschränkten Konvergenz gilt

$$p_{x_m, \lambda_m} \xrightarrow[\text{stark}]{} p_{x^*, \lambda^*}$$

in $L_{\mathbb{C}}^2([0, 1]^n)$. Andererseits gilt aber

$$\prod_{i=1}^n q_m(t_i) \xrightarrow[\text{schwach}]{} \prod_{i=1}^n q(t_i)$$

ebenfalls in $L_{\mathbb{C}}^2([0, 1]^n)$. Dies zeigt man, indem man die Monome $t_1^{k_1}, \dots, t_n^{k_n}$, die einen dichten Unterraum von $L_{\mathbb{C}}^2([0, 1]^n)$ aufspannen, integriert. Es folgt dann

$$|\Delta_m(x_m, \lambda_m)| \rightarrow 0,$$

was ein Widerspruch ist. Somit ist das Theorem für y_1 bewiesen, der Beweis für y_2 verläuft analog. \square

Wir wissen, dass y_1 und y_2 analytische Funktionen in q sind und da wir uns in dem Hilbertraum $L_{\mathbb{C}}^2$ befinden, können wir auch Gradienten und Ableitungen bestimmen. Zunächst treffen wir eine Aussage über die Funktionen y_1^2, y_1y_2, y_2^2 .

Theorem 1.22. Für jedes Paar $(\lambda, q) \in \mathbb{C} \times L_{\mathbb{C}}^2$ sind die Funktionen

$$y_1^2, y_1y_2, y_2^2$$

linear unabhängig auf $[0, 1]$.

Beweis. Wenn wir die Gleichung $y_j'' = (q - \lambda)y_j$ für $j = 1, 2$ benutzen und $2(q - \lambda)$ -mal die erste Zeile von der dritten subtrahieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & y_2^2 \\ (y_1^2)' & (y_1y_2)' & (y_2^2)' \\ (y_1^2)'' & (y_1y_2)'' & (y_2^2)'' \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & y_2^2 \\ 2y_1y_1' & y_1'y_2 + y_1y_2' & 2y_2y_2' \\ 2(y_1'')^2 + 2y_1y_1'' & 2y_1'y_2'' + y_1y_2'' + y_1''y_2 & 2(y_2'')^2 + 2y_2y_2'' \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & y_2^2 \\ 2y_1y_1' & y_1'y_2 + y_1y_2' & 2y_2y_2' \\ 2(y_1')^2 & 2y_1'y_2' & 2(y_2')^2 \end{pmatrix} \\ &= 2y_1^2(y_1'y_2 + y_1y_2')(y_2')^2 + 4y_1(y_1')^2y_2^2y_2' + 4y_1(y_1')^2y_2^2y_2' \\ &\quad - 2(y_1')^2(y_1'y_2 + y_1y_2')y_2^2 - 4y_1^2y_1'y_2(y_2')^2 - 4y_1^2y_1'y_2(y_2')^2 \\ &= 2y_1^3(y_2')^3 - 2y_2^3(y_1')^3 - 6y_1^2y_2y_1'(y_2')^2 + 6y_1y_2^2(y_1')^2y_2' \\ &= 2(y_1y_2' - y_1'y_2)^3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Wronski-Identität. Somit sind y_1^2, y_1y_2, y_2^2 linear unabhängig. \square

Nun werden wir zeigen, dass die Ableitungen von y_1 und y_2 bezüglich q sich in Produkten von y_1 und y_2 ausdrücken lassen.

Theorem 1.23. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_j}{\partial q(t)} &= y_j(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]\mathbf{1}_{[0,x]}(t), \\ \frac{\partial y_j'}{\partial q(t)} &= y_j(t)[y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t)]\mathbf{1}_{[0,x]}(t) \end{aligned}$$

für $j = 1, 2$. Die Gradienten sind stetig bezüglich x, λ, q .

(b) Die Ableitungen der Funktionen y_j erfüllen für $j = 1, 2$ die Gleichungen

$$\frac{\partial y_j}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y_j}{\partial q(t)} dt,$$

und

$$\frac{\partial y'_j}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y'_j}{\partial q(t)} dt.$$

Beweis. (a) Wir betrachten wieder die Hillgleichung

$$-y''_j + q(x)y_j = \lambda y_j.$$

Leiten wir diese nach q in Richtung v ab, so erhalten wir

$$-d_q y''_j(v) + q(x)d_q y_j(v) = \lambda d_q y_j(v) - v y_j.$$

Wenn q stetig ist, dann ist y_j zweimal stetig differenzierbar in x und wir können die Ableitung bzgl. x und q vertauschen. Es gilt also

$$d_q y''_j(v) = (d_q y_j(v))''.$$

Die Anfangswerte von $d_q y_j(v)$ verschwinden beide, da die Anfangswerte von y_j unabhängig von q sind. Somit liefert uns Theorem 1.9

$$d_q y_j(v) = \int_0^x y_j(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]v(t)dt.$$

Beide Seiten sind in q stetige Funktionen auf $L^2_{\mathbb{C}}$ und die Gleichung gilt auf einer dichten Teilmenge von $L^2_{\mathbb{C}}$, nämlich den stetigen Funktionen. Somit gilt die Gleichung für alle q und

$$\frac{\partial y_j}{\partial q(t)} = y_j(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]\mathbf{1}_{[0,x]}(t)$$

ist bewiesen. Wenn wir beide Seiten nach x ableiten, folgt für stetige q

$$d_q y'_j(v) = \int_0^x y_j(t)[y_1(t)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(t)]v(t)dt.$$

Dies gilt dann wieder für alle q aufgrund der Stetigkeit.

(b) Die Behauptung folgt aus der Identität

$$y_j(x, \lambda + \varepsilon, q) = y_j(x, \lambda, q - \varepsilon),$$

denn diese impliziert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} y_j(x, \lambda, q) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y_j(x, \lambda, q - \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial y_j}{\partial q(t)} dt. \end{aligned}$$

Somit ist $\partial y_j / \partial \lambda$ die Richtungsableitung von y_j in q in Richtung der konstanten Funktion -1 . Mit dem gleichen Argument folgt die Behauptung für y'_j . \square

1.4. Dirichlet-Problem

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem einfachsten Randwertproblem für die Hillgleichung. In diesem Fall lässt sich eine schöne Aussage über die Lage der Eigenwerte treffen.

Definition 1.24. *Die Differentialgleichung*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1$$

mit den Randwerten

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

heißt **Dirichletproblem**.

Die Eigenwerte zu diesem Problem heißen **Dirichleteigenwerte**, bezeichnet mit $\mu(q)$. Die Menge aller Dirichleteigenwerte bildet das **Dirichletspektrum**.

Interessant sind hierbei natürlich nur die nichttrivialen Lösungen. Die fundamentale Lösung dieses Randwertproblems erhalten wir mit Korollar 1.10 als

$$y(x) = y'(0)y_2(x, \lambda, q),$$

da $y(0) = 0$ gilt. Um auch den Funktionswert am rechten Rand auf 0 zu setzen, muss λ variiert werden, da an der Stelle $x = 1$ die Funktion y_2 den Funktionswert $y_2(1, \lambda, q)$ besitzt. λ wird nun so variiert, dass dieser Funktionswert 0 wird. Eine Vorbereitung zu dieser Variationsmethode ist die folgende Beobachtung.

Ist μ eine Nullstelle von $y_2(1, \lambda, q)$, dann ist $y_2(x, \mu, q)$ eine nichttriviale Lösung der Hillgleichung zu den Dirichlet-Randwerten, also ist μ dann ein Dirichleteigenwert. Ist umgekehrt μ ein Dirichleteigenwert zu der Eigenfunktion $y(x)$, dann gilt wegen Korollar 1.10

$$y(x) = y'(0)y_2(x, \lambda, q)$$

und somit wegen den Randbedingungen $y_2(1, \mu, q) = 0$. Das Dirichletspektrum von (1.2) ist also identisch mit der Nullstellenmenge von $y_2(1, \lambda, q)$. Ab sofort werden wir nicht mehr zwischen diesen beiden unterscheiden. Im freien Fall lässt sich das Dirichletspektrum leicht bestimmen, da dann $y_2(1, \lambda, 0) = \sin \sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda}$ ist. Somit ist das Dirichletspektrum zu $q \equiv 0$ gegeben durch

$$\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots, n^2\pi^2, \dots$$

Unser Ziel ist es nun zu bestimmen, in welchem Bereich die Dirichleteigenwerte zu einem beliebigen Potential q liegen. Es wird sich ergeben, dass die Dirichleteigenwerte zu einem beliebigen Potential immer relativ nahe bei den Dirichleteigenwerten des freien Potentials liegen.

Wir werden nun die Hillgleichung in Matrixschreibweise einführen und damit Informationen über die Lage der Dirichleteigenwerte erhalten. Das Potential $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ sei so normiert, dass $\int_0^1 q(s)ds = 0$ gilt. Dies macht bei der Betrachtung der Asymptotik der Dirichleteigenwerte, die wir jetzt durchführen werden, keinen Unterschied, da eine Änderung des Integralwertes nur der Verschiebung jedes Dirichleteigenwertes um diese Konstante entspricht.

Die Hillgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

wird zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition $\kappa^2 := -\lambda$ erhalten wir als Matrix

$$H := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^2 + q & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix H werden wir nun adjungieren mit einer Matrix $G = TA$, definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\kappa \end{pmatrix}, \quad T := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/\kappa \\ -1 & 1/\kappa \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \kappa & \kappa \end{pmatrix}$$

und

$$GHG^{-1} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q/\kappa & -q/\kappa \\ q/\kappa & -q/\kappa \end{pmatrix} =: \beta_0 + \beta_1.$$

Wir haben durch die Adjungierung also eine Aufteilung der Matrix H erhalten. Es sind die Diagonalmatrix β_0 und die Matrix β_1 , dessen Norm für großes κ klein wird, entstanden.

Das folgende Lemma liefert eine Aussage über die Konvergenz der darauf folgenden Picard-Iteration. Einen ähnlichen Beweis hatten wir bereits in Theorem 1.3.

Lemma 1.25. *Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ Lebesgue-integrierbar. Dann konvergiert die Abbildung*

$$x \mapsto \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \alpha(t_1) \alpha(t_2) \cdots \alpha(t_n) dt_1 \cdots dt_n \quad (1.18)$$

gegen die Lösung von $F' = F\alpha$ mit $F(0) = \mathbb{1}$.

Beweis. Die Reihe (1.18) konvergiert wegen

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^x \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \alpha(t_1) \alpha(t_2) \cdots \alpha(t_n) dt_1 \cdots dt_n \right\| \\ & \leq \int_0^x \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \|\alpha(t_1)\| \|\alpha(t_2)\| \cdots \|\alpha(t_n)\| dt_1 \cdots dt_n \\ & \leq \frac{1}{n!} \int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x \|\alpha(t_1)\| \|\alpha(t_2)\| \cdots \|\alpha(t_n)\| dt_1 \cdots dt_n \\ & \leq \frac{1}{n!} \left(\int_0^x \|\alpha(t)\| dt \right)^n. \end{aligned}$$

□

Führt man nun eine Variation der Parameter durch, so ergibt sich, dass die eindeutige Lösung von $F'(x) = F(x)\alpha_0 + B(x)$ mit $F(0) = \mathbb{1}$ und x -unabhängigem α_0 gegeben ist durch

$$F(x) = \exp(x\alpha_0) + \int_0^x B(t) \exp((x-t)\alpha_0) dt.$$

Somit ist die Lösung von $F'(x) = F(x)(\alpha_0 + \alpha_1)$ mit x -unabhängigem α_0 gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)$$

mit

$$C_0(x) = \exp(x\alpha_0) \quad \text{und} \quad C_{n+1}(x) = \int_0^x C_n(t) \alpha_1(t) \exp((x-t)\alpha_0) dt$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nun können wir die Differentialgleichung lösen, die durch die beiden Matrizen β_0 und β_1 gegeben ist. Wir lösen $E' = E(\beta_0 + \beta_1)$ und $E(0) = \mathbb{1}$ mit dem Ansatz

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \quad \text{mit} \quad E_0(x) = \exp(x\beta_0).$$

Es ergibt sich als rekursive Gleichung für E_n , $n \geq 1$

$$E_{n+1}(x) = \int_0^x E_n(t) \beta_1(t) \exp((x-t)\beta_0) dt = \int_0^x E_n(t) \beta_1(t) E_0(-t) dt E_0(x).$$

Setzen wir jedes $E_n(x)$ rekursiv in diese Gleichung ein, so erhalten wir eine Schreibweise als n -faches Integral.

$$E_n(x) = \int_0^x \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} E_0(t_1) \beta_1(t_1) E_0(-t_1) E_0(t_2) \beta_1(t_2) \cdots E_0(-t_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n E_0(x)$$

Nun schätzen wir die Norm von $E_n(x)$ ab.

$$\begin{aligned} \|E_n(x)\| &\leq \int_0^x \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \|E_0(t_1)\| \|\beta_1(t_1)\| \|E_0(t_2 - t_1)\| \|\beta_1(t_2)\| \\ &\quad \cdots \|E_0(x - t_n)\| dt_1 dt_2 \dots dt_n \\ &\leq \int_0^x \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \|\beta_1(t_1)\| \|\beta_1(t_2)\| \cdots \|\beta_1(t_n)\| \\ &\quad \|E_0(t_1)\| \|E_0(t_2 - t_1)\| \cdots \|E_0(x - t_n)\| dt_1 dt_2 \dots dt_n \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\|E_0(t_1)\| \|E_0(t_2 - t_1)\| \cdots \|E_0(x - t_n)\| \leq \|E_0(x)\|$. Fährt man weiter fort wie im Beweis von Lemma 1.25, so ergibt sich die Abschätzung

$$\|E_n(x)\| \leq \frac{\|q\|^n \|E_0(x)\|}{|\kappa|^n n!}. \quad (1.19)$$

Insbesondere wird also $E_n(x)$ klein für großes n . Dies folgt auch bereits aus der Konvergenz der Summe $E(x)$. Es gilt nun

$$\int_0^1 \|\beta_1(t)\| dt = \int_0^1 \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q(t)/\kappa & -q(t)/\kappa \\ q(t)/\kappa & -q(t)/\kappa \end{pmatrix} \right\| dt = O\left(\frac{1}{|\kappa|}\right)$$

Mit den Bezeichnungen M für die Monodromie eines beliebigen Potentials und M_0 für die Monodromie des freien Potentials seien die adjungierten Monodromien N und N_0 , definiert durch $N := GMG^{-1} = E(1)$ und $N_0 := GM_0G^{-1} = E_0(1)$. Wir erhalten mit Hilfe von (1.19) die Abschätzung

$$\|N - N_0\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} E_n(1) \right\| \leq \|E_0(1)\| \left(e^{\frac{\|q\|}{|\kappa|}} - 1 \right).$$

Diese Abschätzung hatten wir mit einer anderen Schreibweise bereits in Theorem 1.12 bewiesen. Die Ableitung von $E_0(1)$ nach κ ist

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} E_0(1) = \frac{\partial}{\partial \kappa} \begin{pmatrix} e^\kappa & 0 \\ 0 & e^{-\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E_0(1).$$

Im nächsten Schritt berechnen wir die Ableitung von $E_1(1)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \kappa} E_1(1) &= \frac{\partial}{\partial \kappa} \int_0^1 E_0(t) \beta_1(t) E_0(1-t) dt \\ &= \int_0^1 \left[\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} E_0(t) \beta_1(t) E_0(1-t) - E_0(t) \frac{1}{\kappa} \beta_1(t) E_0(1-t) \right. \\ &\quad \left. + E_0(t) \beta_1(t) \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & -1+t \end{pmatrix} E_0(1-t) \right] dt. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun die Norm, so erhalten wir als Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \kappa} E_1(1) \right\| &\leq \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{|\kappa|} + 1 \right) \|E_0(t)\| \|\beta_1(t)\| \|E_0(1-t)\| dt \\ &\leq \left(2 + \frac{1}{|\kappa|} \right) \|E_1(1)\|. \end{aligned}$$

Leiten wir einen anderen Summanden $E_n(1)$ nach κ ab, so müssen wir wie oben die Produktregel beachten. Wir erhalten also analog als Abschätzung für die Norm

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \kappa} E_n(1) \right\| \leq \left((n+1) + \frac{n}{|\kappa|} \right) \|E_n(1)\|.$$

Zusammen mit (1.19) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \kappa} E_n(1) \right\| &\leq \left((n+1) + \frac{n}{|\kappa|} \right) \frac{\|q\|^n \|E_0(1)\|}{|\kappa|^n n!} \\ &\leq \|E_0(1)\| \left(\left(\frac{\|q\|}{|\kappa|} + \frac{\|q\|}{|\kappa|^2} \right) \frac{\|q\|^{n-1}}{|\kappa|^{n-1} (n-1)!} + \frac{\|q\|^n}{|\kappa|^n n!} \right). \end{aligned}$$

Die Dirichleteigenwerte des freien Potentials bezeichnen wir nun mit ρ_n . Mit dieser Bezeichnung gilt $\rho_n = n\pi i$ und somit $\exp(\rho_n) = (-1)^n$. Wir erhalten bei einem Dirichleteigenwert die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \kappa} N(\rho_n) - \frac{\partial}{\partial \kappa} N_0(\rho_n) \right\| &= \left(\frac{\|q\|}{n\pi} + \frac{\|q\|}{n^2\pi^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|q\|^{n-1}}{(n\pi)^{n-1} (n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|q\|^n}{(n\pi)^n n!} \\ &\leq \left(\left(\frac{\|q\|}{n\pi} + \frac{\|q\|}{n^2\pi^2} \right) e^{\frac{\|q\|}{n\pi}} + e^{\frac{\|q\|}{n\pi}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Liegt nun ein Dirichleteigenwert κ eines beliebigen Potentials nahe bei ρ_n , dann erhalten wir für die Ableitung

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \kappa} N - \frac{\partial}{\partial \kappa} N_0 \right\| \leq \|E_0(1)\| \left(\left(\frac{\|q\|}{|\kappa|} + \frac{\|q\|}{|\kappa|^2} \right) e^{\frac{\|q\|}{|\kappa|}} + e^{\frac{\|q\|}{|\kappa|}} - 1 \right).$$

Als eine weitere Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\kappa) - \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\rho_n) \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} e^\kappa - e^{\rho_n} & 0 \\ 0 & -e^{-\kappa} + e^{-\rho_n} \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq e^{\rho_n} (e^{\kappa - \rho_n} - 1) \leq e^{|\operatorname{Re} \kappa|} |\kappa - \rho_n|. \end{aligned}$$

Wir definieren nun $N_1(\rho_n)$ als die abgebrochene Reihenentwicklung der Monodromie bei einem Dirichleteigenwert ρ_n des freien Potentials.

$$N_1(\rho_n) := E_0(1, \rho_n) + E_1(1, \rho_n)$$

Wie bei einer Taylorentwicklung erhalten wir als Abschätzung für N in der Nähe von ρ_n zu einem beliebigen Potential

$$\begin{aligned} &\left\| N(\kappa) - \left(N_1(\rho_n) + (\kappa - \rho_n) \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\rho_n) \right) \right\| \\ &= \left\| N(\kappa) - N(\rho_n) + N(\rho_n) - N_1(\rho_n) - (\kappa - \rho_n) \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\rho_n) \right\| \\ &\leq \left\| \int_{\rho_n}^{\kappa} \frac{\partial N}{\partial \kappa}(\phi) d\phi - (\kappa - \rho_n) \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\rho_n) \right\| + \|N(\rho_n) - N_1(\rho_n)\| \\ &\leq \int_{\rho_n}^{\kappa} \left\| \frac{\partial N}{\partial \kappa}(\phi) - \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\rho_n) \right\| d\phi + \exp\left(\frac{\|q\|}{n\pi}\right) - 1 - \frac{\|q\|}{n\pi} \\ &\leq \int_{\rho_n}^{\kappa} \left\| \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\phi) - \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\rho_n) \right\| d\phi + \int_{\rho_n}^{\kappa} \left\| \frac{\partial N}{\partial \kappa}(\phi) - \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\phi) \right\| d\phi + \frac{\|q\|}{n^2\pi^2} \exp\left(\frac{\|q\|}{n\pi}\right) \\ &\leq |\kappa - \rho_n|^2 e^{|\operatorname{Re} \kappa|} + e^{|\operatorname{Re} \kappa|} \left(\frac{\|q\|}{|\kappa|} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \exp\left(\frac{\|q\|}{|\kappa|}\right) + \exp\left(\frac{\|q\|}{|\kappa|}\right) - 1 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\leq |\kappa - \rho_n| \left(e^{|\operatorname{Re} \kappa|} |\kappa - \rho_n| + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Lemma 1.26. Für eine Konstante K , n groß genug und $|\kappa - n\pi i| = \frac{K}{n}$ gilt die Abschätzung

$$|\sinh \kappa| > \left(\exp \left(\frac{\|q\|}{|\kappa|} \right) - 1 \right) e^{|\operatorname{Re} \kappa|}.$$

Beweis. Wir setzen $\kappa = a + i(b + n\pi)$ und können annehmen, dass $b < \pi$ gilt, da aufgrund der Perioden von \sinh die Gleichung $|\sinh(i(b + n\pi))| = |\sinh ib|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aufgrund der Voraussetzung $|\kappa - n\pi i| = \frac{K}{n}$ werden für großes n sowohl a als auch b klein. Wir wählen zunächst $n > N_1$, so dass die Abschätzungen $|\cos b| > \frac{1}{2}$, $|\sin b| \geq \frac{|b|}{2}$ und $e^{|a|} \leq 2$ gelten. Wir wählen nun $K > \frac{8}{\pi}\|q\|$ und $n > N_2$, so dass die Ungleichung

$$\frac{K}{n} > \frac{8}{n\pi}\|q\| = \frac{8}{|n\pi i|}\|q\| > \frac{4}{|\kappa|}\|q\|$$

gilt. Mit $n > \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\sinh(\kappa)| &= |\sinh(a + ib)| = |\sinh a \cos b + i \cosh a \sin b| \\ &> \left| \frac{\sinh a}{2} + i \sin b \right| \geq \frac{1}{2}|a + ib| \\ &\geq \frac{K}{2n} \geq 2 \frac{\|q\|}{|\kappa|} \\ &\geq e^{|a|} \left(\exp \left(\frac{\|q\|}{|\kappa|} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

□

Die Einträge in den Matrizen N und N_0 , die relevant sind für die Dirichleteigenwerte, sind nur die Einträge rechts oben. In der Matrix N bezeichnen wir diesen mit $g(\kappa)$, in der Matrix N_0 mit $f(\kappa)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(\kappa) &= \frac{1}{2} \left(-\cos \sqrt{\lambda} + \cos \sqrt{\lambda} + \kappa \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\kappa} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa} \sin \sqrt{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Nun setzen wir $-i\kappa = \sqrt{\lambda}$ ein, dann erhalten wir

$$f(\kappa) = \frac{1}{2} (i \sin(-i\kappa) + i \sin(-i\kappa)) = \sinh(\kappa).$$

Auf den Konturen der Kreise $|\kappa - n\pi i| \leq \frac{K}{n}$ gilt wegen Lemma 1.26 die Ungleichung

$$|g(\kappa) - f(\kappa)| < |f(\kappa)|.$$

Dann folgt aus dem Satz von Rouché, dass $f(\kappa)$ und $g(\kappa)$ im Inneren der Kreise gleich viele Nullstellen haben, $g(\kappa)$ hat genau die einfachen Nullstellen $n\pi i$, somit besitzt auch $f(\kappa)$ genau eine Nullstelle in den für wachsendes κ immer kleiner werdenden Kreisen um $n\pi i$. Somit haben wir das folgende Lemma bewiesen.

Lemma 1.27. *Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass in den Kreisen $|\kappa - n\pi i| < \frac{K}{n}$ für $n > N$ genau ein Dirichleteigenwert liegt. Die anderen N Dirichleteigenwerte liegen in der offenen Halbebene $\operatorname{Re} \kappa < (N + \frac{1}{2})\pi$.*

Der Beweis des zweiten Teils der Aussage findet man in [30, S.28], das gesamte Lemma ist eine Verschärfung der Aussage des „Counting Lemma“ auf der gleichen Seite.

Um den Ausdruck $E_1(1)$ genauer zu verstehen, berechnen wir ihn explizit.

$$\begin{aligned} E_1(1) \exp(-\beta_0) &= \int_0^1 \exp(-\beta_0 s) \beta_1(s) \exp(\beta_0 s) ds \\ &= \int_0^1 \exp(-\beta_0 s) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{q(s)}{\kappa} & -\frac{q(s)}{\kappa} \\ \frac{\kappa}{q(s)} & -\frac{\kappa}{q(s)} \end{pmatrix} \exp(\beta_0 s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} q(s) & -e^{-2s\kappa} q(s) \\ e^{2s\kappa} q(s) & -q(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} 0 & -\int_0^1 e^{-2s\kappa} q(s) ds \\ \int_0^1 e^{2s\kappa} q(s) ds & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Dirichleteigenwerte von

$$N_1(\rho_n) + (\kappa - \rho_n) \frac{\partial N_0}{\partial \kappa}(\rho_n),$$

diese bezeichnen wir mit δ . Außerdem sei $\hat{q}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n s} q(s) ds$ der n -te Fourierkoeff-

fiziert von q .

$$\begin{aligned}
 & G^{-1} \left(N_1(\rho_n) + (\kappa - \rho_n)(-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) G \\
 &= G^{-1}(-1)^n \begin{pmatrix} 1 + \kappa - n\pi i & -\frac{\int_0^1 e^{-2s\pi i n} q(s) ds}{2\pi i n} \\ \frac{\int_0^1 e^{2s\pi i n} q(s) ds}{2\pi i n} & 1 - \kappa + n\pi i \end{pmatrix} G \\
 &= (-1)^n G^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \kappa - n\pi i & -\frac{1}{2\pi i n} \hat{q}(n) \\ \frac{1}{2\pi i n} \hat{q}(-n) & 1 - \kappa + n\pi i \end{pmatrix} G \\
 &= \frac{(-1)^n}{2} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2\pi i n} (\hat{q}(n) - \hat{q}(-n)) & \frac{1}{\kappa} (2\kappa - 2n\pi i - \frac{1}{2\pi i n} (\hat{q}(n) + \hat{q}(-n))) \\ \kappa (2\kappa + 2n\pi i + \frac{1}{2\pi i n} (\hat{q}(n) + \hat{q}(-n))) & 2 + \frac{1}{2\pi i n} (\hat{q}(-n) - \hat{q}(n)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit δ ein Dirichleteigenwert ist, muss der Eintrag in der Matrix oben rechts verschwinden. Daraus erhalten wir die Gleichung

$$\delta - n\pi i = \frac{1}{4\pi i n} (\hat{q}(-n) + \hat{q}(n)).$$

Somit ist $\delta - n\pi i$ proportional zu den Fouriercosinuskoeffizienten von q . Außerdem sieht man, dass die Differenz $\delta - n\pi i$ für großes n stark abfällt. Da die Ungleichung (1.20) auch für die Dirichleteigenwerte gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \kappa - n\pi i &= \kappa - \delta + \delta - n\pi i \\
 &= \kappa - \delta + \frac{1}{4\pi i n} (\hat{q}(n) + \hat{q}(-n)) \\
 &\leq (\kappa - n\pi i) \left(K_1(\kappa - n\pi i) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{4\pi i n} (\hat{q}(n) + \hat{q}(-n)),
 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$(\kappa - n\pi i) \left(1 - K_1(\kappa - n\pi i) - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{4\pi i n} (\hat{q}(n) + \hat{q}(-n)).$$

Wegen Lemma 1.27 geht für wachsendes κ der Ausdruck $1 - K_1(\kappa - n\pi i) - O(1/n)$ gegen 1 und es folgt

$$\kappa = n\pi i + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{4\pi i n} (\hat{q}(n) + \hat{q}(-n)).$$

Quadriert man dies, so ergibt sich

$$-\lambda = -n^2\pi^2 + \frac{1}{2}(\hat{q}(n) + \hat{q}(-n)) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wenn wir nun wieder $\int_0^1 q(s)ds$ berücksichtigen, dann haben wir das folgende Lemma bewiesen.

Lemma 1.28. *Für die Dirichleteigenwerte μ_n eines komplexwertigen Potentials $q \in L_{\mathbb{C}}^2$ gilt die Abschätzung*

$$\begin{aligned} \mu_n &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(s)ds + \frac{1}{2}(\hat{q}(n) + \hat{q}(-n)) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(s)ds + e_n, \end{aligned}$$

wobei e_n eine Folge in l^2 ist.

Die Dirichleteigenwerte eines beliebigen Potentials $q \in L_{\mathbb{C}}^2$ liegen also (bis auf eine Konstante $\int_0^1 q(s)ds$, die durch das Potential bestimmt wird) nahe bei den Dirichleteigenwerten des freien Potentials.

Definition 1.29. *Der Hilbertraum l^2 ist der Raum aller Folgen (a_1, a_2, \dots) mit*

$$\sum_{n \geq 1} a_n^2 < \infty.$$

In [18] werden von Kappeler auch noch zwei weitere Abschätzungen für die periodischen Eigenwerte bewiesen. Es gilt

$$\sum_{n \geq N} |\omega_{4n-3} - \omega_{4n-2}|^2 \leq K_1(1 + \|q\|)^{K_2} \quad (1.21)$$

und

$$\sum_{n \geq N} |\mu_{2n} - \omega_{4n-3}|^2 \leq K_1(1 + \|q\|)^{K_2}. \quad (1.22)$$

Hierbei sind K_1 und K_2 zwei Konstanten und $N := K_1(1 + \|q\|)^2$.

Im Spezialfall von reellwertigen Potentialen kann man sofort die Asymptotik des Dirichletspektrums bestimmen.

Theorem 1.30. *Das Dirichletspektrum eines reellwertigen Potentials q ist eine unendliche Folge von reellen Zahlen, die nach unten beschränkt ist und gegen unendlich geht.*

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass die Folge reell bleibt. Dazu sei λ ein Dirichleteigenwert von q mit der Eigenfunktion $y(x)$. Dann gilt

$$-y'' + q(x)y = \lambda y.$$

Wenn wir diese Gleichung komplex konjugieren, dann erhalten wir

$$-\bar{y}'' + q(x)\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y},$$

da q reell ist. Nun multiplizieren wir die erste Gleichung mit \bar{y} , die zweite mit y und bilden die Differenz.

$$[y, \bar{y}]' = \bar{y}''y - y''\bar{y} = (\bar{\lambda} - \lambda)y\bar{y} = (\bar{\lambda} - \lambda)|y|^2$$

Integrieren wir die letzte Gleichung, so erhalten wir

$$[y, \bar{y}] \Big|_0^1 = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_0^1 |y|^2 dt.$$

Die linke Seite verschwindet wegen den gegebenen Anfangswerten $y(0) = y(1) = 0$, das Integral jedoch nicht, also gilt $\bar{\lambda} = \lambda$ und λ ist reell. \square

Wenn wir uns Dirichlet-Randbedingungen vorgeben, so lässt sich jede Eigenfunktion $y(x)$ schreiben als $y(x) = y'(0)y_2(x, \lambda, q)$, somit ist jede Eigenfunktion zu einem Dirichleteigenwert λ ein Vielfaches von $y_2(x, \lambda, q)$. Die Ableitung $\partial/\partial\lambda$ sei nun mit \cdot bezeichnet.

Theorem 1.31. *Wenn λ ein Dirichleteigenwert von $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ ist, dann gilt :*

$$y_2(1, \lambda, q)y_2'(1, \lambda, q) = \int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt$$

Beweis. Nach Theorem 1.23 gilt :

$$\begin{aligned} \dot{y}_2(1, \lambda) &= - \int_0^1 \frac{\partial y_2(1)}{\partial q(t)} dt \\ &= - \int_0^1 y_2(t) [y_1(t)y_2(1) - y_1(1)y_2(t)] \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ &= \int_0^1 y_2^2(t) y_2'(1, \lambda)^{-1} dt \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da für einen Dirichleteigenwert $y_2(1, \lambda) = 0$ ist und somit auch die Wronski-Identität zu $y_1(1, \lambda)y_2'(1, \lambda) = 1$ wird. \square

Im reellen Fall ist das Integral gleich $\|y_2(\cdot, \lambda)\|^2$ und somit die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ gleich 1. Im komplexen Fall ist das Integral nicht mehr notwendigerweise positiv. Wir werden später zeigen, dass die Vielfachheit jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Lemma 1.32. *Die Eigenfunktionen können normalisiert werden, es gilt $\int_0^1 f_i^2 \neq 0$.*

Beweis. Sei \hat{q} eine infinitesimale Veränderung von q , wir betrachten die Variation der Hillgleichung

$$\hat{L}f_i + L\hat{f}_i = \hat{\lambda}_i f_i + \lambda_i \hat{f}_i.$$

Hier sind die Eigenfunktionen so gewählt, dass sie lokal glatt in q sind. Damit ist $\hat{\lambda}$ wohldefiniert, da dann auch die einfachen Eigenwerte lokal glatt in q sind. Nehmen wir nun das innere Produkt mit f_i , so erhalten wir

$$\int_0^1 \hat{q} f_i^2 dx = \hat{\lambda}_i \int_0^1 f_i^2 dx.$$

Ist nun $\int_0^1 f_i^2 dx = 0$, dann gilt $\int_0^1 \hat{q} f_i^2 dx = 0$. Aber da \hat{q} eine beliebige Funktion ist, gilt $f_i^2 = 0$. Dies ist ein Widerspruch. \square

Nun weisen wir jedem Eigenwert eine Eigenfunktion $g_n = g_n(x, q)$ zu, die wir normalisieren durch

$$\|g_n\| = 1, \quad g_n'(x) > 0.$$

Aus dem obigen Theorem folgt dann

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n, q)}{\sqrt{\dot{y}_2(1, \mu_n, q)y_2'(1, \mu_n, q)}}.$$

Im Speziellen gilt

$$g_n(x, 0) = \sqrt{2} \sin n\pi x.$$

Wir betrachten nun die Dirichleteigenwerte μ_n als Funktion in Abhängigkeit von dem Potential, für diese Funktion $\mu_n(q)$ können wir den Gradienten berechnen.

Theorem 1.33. μ_n hat den Gradienten

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n^2(t, q).$$

Beweis. Wir beobachten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \mu_n(q), q) \\ &= \dot{y}_2(1, \mu_n) \frac{\partial \mu_n}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \lambda) \Big|_{\lambda=\mu_n}. \end{aligned}$$

Nach Theorem 1.23 ist der zweite Term gleich

$$y_2(t) [y_1(t)y_2(1) - y_1(1)y_2(t)] = -y_1(1)y_2^2(t) = -\frac{1}{y_2'(1)}y_2^2(t),$$

da aufgrund der Wronski-Identität $y_2(1, \mu_n) = 0$ und $y_1(1)y_2'(1) = 1$ gilt. Wir erhalten also

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = \frac{y_2^2(t, \mu_n)}{\dot{y}_2(1, \mu_n)y_2'(1, \mu_n)} = g_n^2(t, q).$$

□

Analog zum charakteristischen Polynom einer $n \times n$ -Matrix erhalten wir auch eine Darstellung von $y_2(1, \lambda, q)$. Allerdings müssen wir die Konvergenz des Produktes beachten, da die Funktion $y_2(1, \lambda, q)$ unendlich viele Nullstellen besitzt.

Theorem 1.34. Für $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ gilt

$$y_2(1, \lambda, q) = \prod_{m \geq 1} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2}.$$

Beweis. Es gilt $\mu_n = n^2 \pi^2 + O(1)$. Benutzen wir Lemma B.20, so erhalten wir, dass

$$p(\lambda) = \prod_{m \geq 1} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

eine ganze Funktion in λ ist. $p(\lambda)$ erfüllt

$$p(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

gleichmäßig auf den Kreisen $|\lambda| = r_n = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ für n groß genug. Die Nullstellen sind genau die Dirichleteigenwerte von q , somit ist der Quotient $p(\lambda)/y_2(1, \lambda, q)$ ebenfalls eine ganze Funktion. Aufgrund der Abschätzungen für y_2 folgt

$$\begin{aligned} y_2(1, \lambda, q) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|)}{|\lambda|}\right) \\ &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

gleichmäßig für $|\lambda| = r_n$. Somit gilt

$$\frac{p(\lambda)}{y_2(1, \lambda, q)} = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

für $|\lambda| = r_n$. Für $n \rightarrow \infty$ gilt also

$$\sup_{|\lambda|=r_n} \left| \frac{p(\lambda)}{y_2(1, \lambda, q)} - 1 \right| \rightarrow 0.$$

Aus dem Maximumsprinzip folgt, dass die Differenz identisch verschwindet. Somit gilt $p(\lambda) = y_2(1, \lambda, q)$. □

Sind die zwei Funktionen $y_2(1, \lambda, q)$ und $y_2(1, \lambda, p)$ gleich, so ist sicherlich $\mu_n(q) = \mu_n(p)$ für alle $n \geq 1$. Also haben p und q das gleiche Dirichletspektrum. Nun wissen wir, dass die Umkehrung ebenso richtig ist. Anders gesagt, die ganze Information über $y_2(1, \lambda, q)$ ist bereits im Dirichletspektrum $\mu_n(q), n \geq 1$ enthalten.

2. Inverses Problem

Im ersten Kapitel hatten wir gezeigt, dass die Dirichleiteigenwerte eines beliebigen Potentials nahe bei den Dirichleiteigenwerten des freien Potentials liegen. Nun interessiert uns die umgekehrte Fragestellung. Wir geben uns beliebige Punkte, die nahe bei den Dirichleiteigenwerten des freien Potentials liegen und wollen das Potential bestimmen, das diese Punkte als Dirichleiteigenwerte besitzt. Um dieses Problem lösen zu können, führen wir eine Riemannsche Fläche ein und betrachten Divisoren auf dieser Riemannschen Fläche.

2.1. Definition der Riemannschen Fläche

Bereits im ersten Kapitel hatten wir das Fundamentalsystem der Hillgleichung bestimmt. Dazu hatten wir auch die Monodromie und die Hill-Diskriminante eingeführt. Hier eine kurze Wiederholung der Schreibweise. Das Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$Y(x, \lambda, q) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda, q) & y_2(x, \lambda, q) \\ y_1'(x, \lambda, q) & y_2'(x, \lambda, q) \end{pmatrix}.$$

Die Monodromie ist das Fundamentalsystem ausgewertet an der Stelle $x = 1$, $M(\lambda) = Y(1, \lambda, q)$ und die Hill-Diskriminante ist definiert als

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2} (y_1(1, \lambda, q) + y_2'(1, \lambda, q)).$$

Benutzen wir die Wronski-Identität $y_1(x, \lambda, q)y_2'(x, \lambda, q) - y_1'(x, \lambda, q)y_2(x, \lambda, q) = 1$ aus Theorem 1.8, so erhalten wir als charakteristisches Polynom der Monodromie

$$\det(m\mathbb{1} - M(\lambda)) = m^2 - 2\Delta(\lambda)m + 1.$$

Löst man die dazugehörige quadratische Gleichung nach m auf, so ergibt sich für die Eigenwerte der Monodromie

$$m_{\pm} = \Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta(\lambda)^2 - 1}.$$

Die Wurzel $(\Delta^2 - 1)^{1/2}$ definiert eine Riemannsche Fläche mit zwei Blättern. Die unendlich vielen möglichen Verzweigungspunkte und/oder singulären Punkte dieser Riemannschen Fläche befinden sich an den Berührungspunkten der Blätter. Benutzen wir nun die Bezeichnungen aus Definition 1.19, dann ist ω_i für $\Delta(\omega_i) = 1$ und $i = 4n - 3, 4n - 2$, $n \in \mathbb{N}$ ein periodischer Eigenwert und ω_j ein antiperiodischer Eigenwert für $\Delta(\omega_j) = -1$ und $j = 4n - 1, 4n$, $n \in \mathbb{N}$. An diesen Stellen ist $m_+ = \pm 1 = m_-$ und M hat die kanonische Jordanform

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \alpha \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Ist $\alpha = 0$, so existieren zwei linear unabhängige periodische oder antiperiodische Eigenfunktionen und die geometrische Vielfachheit des zugehörigen Eigenwertes ist maximal, also gleich zwei. Ist $\alpha \neq 0$, dann existiert nur eine periodische oder antiperiodische Eigenfunktion oder die geometrische Vielfachheit ist 1.

Aufgrund Korollar 1.17 besitzen die Funktionen $\Delta(\lambda) - 1$ und $\Delta(\lambda) + 1$ unendlich viele Nullstellen, somit besitzt auch die Funktion $\Delta(\lambda)^2 - 1$ unendlich viele Nullstellen. Da $\Delta(\lambda)$ asymptotisch gleich $\cos \sqrt{\lambda}$ ist, folgt aus der Gleichung $\cos^2 \sqrt{\lambda} - 1 = -\sin^2 \sqrt{\lambda}$, dass $\Delta(\lambda)^2 - 1$ asymptotisch gleich $-\sin^2 \sqrt{\lambda}$ für großes λ ist. In (B.2) hatten wir die Produktdarstellung

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\pi^2 n^2} \right)$$

als Hadamardprodukt. Also können wir auch $\Delta(\lambda)^2 - 1$ als Produkt

$$\Delta^2 - 1 = -(\lambda - \omega_0) \prod_{n=1}^{\infty} (\lambda - \omega_{2n}) (\lambda - \omega_{2n-1}) / n^4 \pi^4 \quad (2.1)$$

schreiben. Die gemeinsame Entwicklung von ω_{2n-1} und ω_{2n} ist für $n \rightarrow \infty$ analog zu den Dirichleteigenwerten $n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(s) ds + c_1 n^{-2} + c_2 n^{-4} + \dots$, wie in [18] bewiesen wird. Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist die Anzahl von zusammenfallenden Eigenwerten $\omega_j = \omega_k$ im Produkt. Ist das Potential q reell, dann sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten gleich. Wir werden noch zeigen, dass bei komplexen Potentialen im Gegensatz zu reellen Potentialen jede beliebige algebraische Vielfachheit möglich ist.

Man kann mit Hilfe einer Deformation des freien Potentials jedes beliebige komplexe oder reelle Potential q erhalten. Dazu führen wir εq ein, dabei soll ε zunächst klein sein und lassen dann ε gegen 1 gehen. Das freie Potential entspricht $\varepsilon = 0$, das Potential q entspricht $\varepsilon = 1$. Unter dieser Deformation ist das Potential eine analytische Funktion

in ε . Nun ist aber $\Delta(\lambda, q) = \frac{1}{2}(y_1(1, \lambda, q) + y_2'(1, \lambda, q))$ analytisch in q , da die beiden Funktionen $y_1(1, \lambda, q)$ und $y_2'(1, \lambda, q)$ analytisch in q sind. Somit ist auch $\Delta(\lambda, \varepsilon q)$ analytisch in ε für ein festes q . Zunächst untersuchen wir den Fall $q \equiv 0$. Dann sind die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte $\omega_{2n-1} = \omega_{2n} = n^2\pi^2$ alle doppelt, außer dem einfachen Basiszustand ω_0 . Wir betrachten die Werteverteilung der dazugehörigen Diskriminante $\Delta(\lambda, 0) = \cos \sqrt{\lambda}$ in der $\sqrt{\lambda}$ -Ebene.

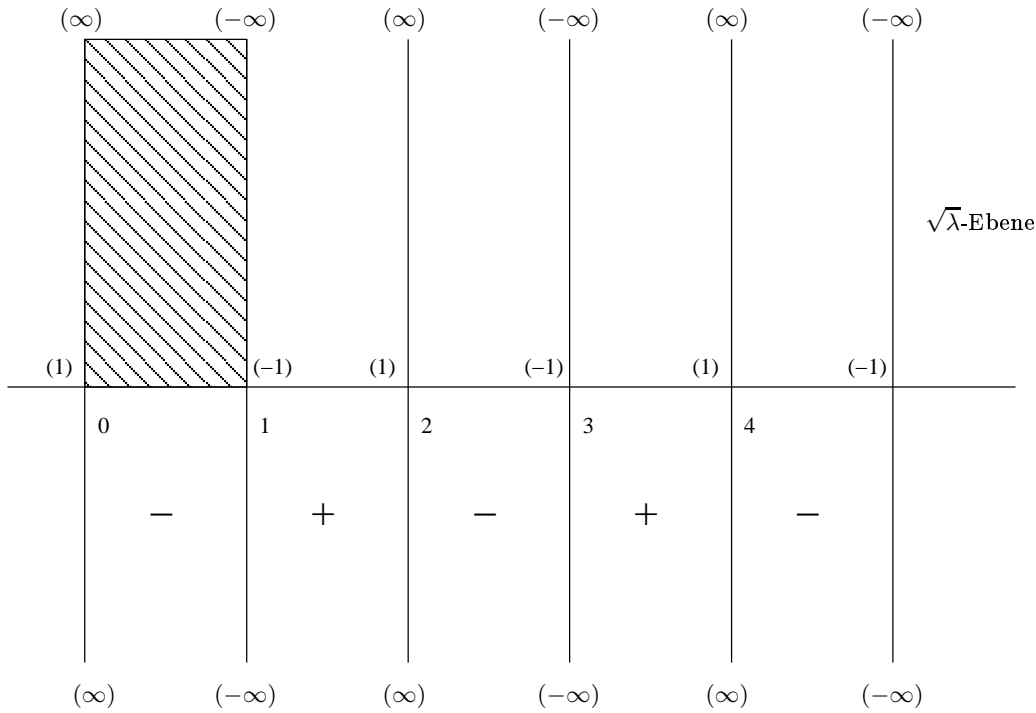


Abbildung 2.1.: $\Delta(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}$ in der $\sqrt{\lambda}$ -Ebene

Δ bildet den schraffierten Streifen bijektiv auf die obere Halbebene ab und nimmt die Werte in Klammern an den Punkten $i\infty, 0, \pi, \pi+i\infty$ an. Genauso wird jeder Halbstreifen auf eine Halbebene abgebildet, so dass ein Streifen (+), der auf die obere Halbebene abgebildet wird, von Streifen (-) umgeben ist, die auf die untere Halbebene abgebildet werden und umgekehrt. Δ ist überall konform, außer an den Punkten $n\pi$, bei denen $\partial\Delta/\partial\lambda = 0$ gilt. Δ ist reell auf den Linien, die die Streifen erzeugen und somit streng monoton wachsend oder fallend auf diesen Linien. Wir wollen nun zeigen, dass weit genug außen in der komplexen Ebene die Streifen unter der ε -Deformation ihre Form behalten

2. Inverses Problem

und die Eigenwerte auf natürliche Weise nummeriert werden können. Wir hatten bereits in Lemma 1.20 die Abschätzung

$$\Delta(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}(1 + O(1/\lambda)).$$

für beschränktes $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ gezeigt. Im Speziellen gilt also $|\Delta| > 1$ für $\text{Im } \lambda \neq 0$. Die Linien $\sqrt{\lambda} = a + ib$, auf denen Δ reell ist, haben für großes b die asymptotische Entwicklung $a = n\pi + c_1/b + c_2/b^2 + \dots$, $n \in \mathbb{Z}$. Wir können also einen Kreis D finden, der so groß ist, dass unter den Deformationen kein Eigenwert auf D liegt oder aus D heraus bewegt wird. Dann folgt aus dem Theorem A.3 von Hurwitz, dass innerhalb von D weder neue periodische oder antiperiodische Eigenwerte entstehen noch verschwinden. Außerdem behalten wegen den Asymptoten die Streifen das Aussehen von Abbildung 2.1 für großes λ , so dass für ein beliebiges q die Eigenwerte bei $\varepsilon = 1$ zurückgeführt werden können auf die doppelten Paare $\omega_{2i-1} = \omega_{2i}$ oder den Basiszustand ω_0 für $\varepsilon = 0$. Dies liefert eine natürliche Nummerierung.

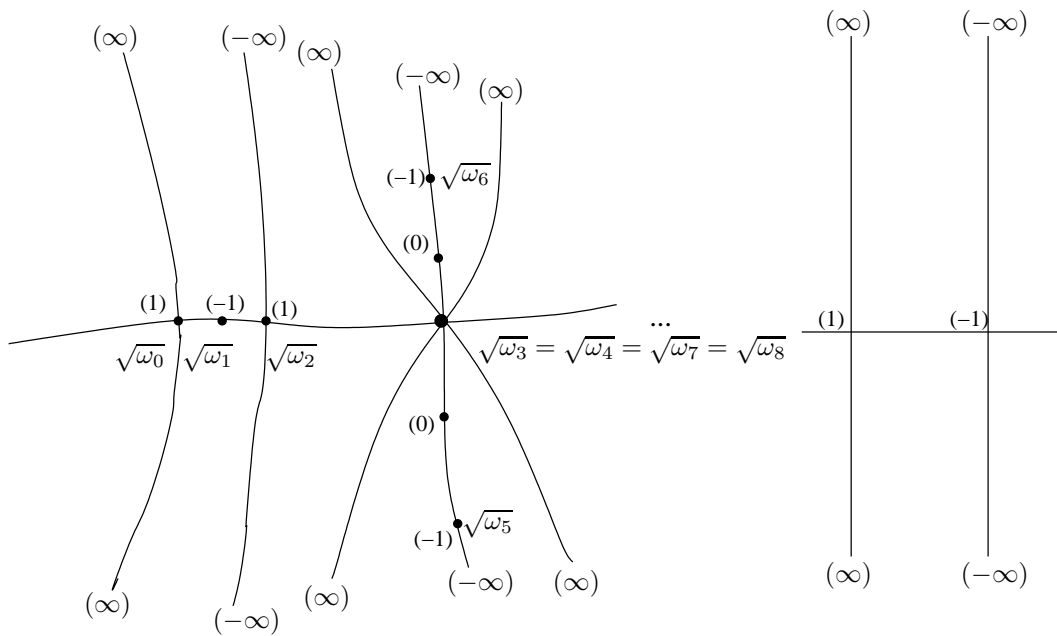


Abbildung 2.2.: Δ in der $\sqrt{\lambda}$ -Ebene nach der Deformation

Die Linien können weder auseinanderreißen noch neue Ecken entwickeln. Aufgrund der Monotonie von Δ können sich auf den Linien keine zwei Punkte mit unterschiedlichen

Werten von Δ treffen. Somit entstehen keine glatten Schleifen, die sich selbst schneiden. Wenn sich andererseits einige doppelte Eigenwerte in die imaginäre Richtung aufteilen, also zu einfachen Paaren werden, dann können sich Punkte mit dem gleichen Wert für Δ treffen, somit kann die algebraische Vielfachheit von den Eigenwerten 2 überschreiten. Abbildung 2.2 zeigt Streifen nach einer Deformation. ω_3 hat die algebraische Vielfachheit 4, dies wurde möglich durch die Auftrennung der ursprünglichen ω_5 und ω_6 in die imaginäre Richtung. Es ist nun verständlich, dass jede algebraische Vielfachheit bei dem periodischen und antiperiodischen Spektrum eines komplexwertigen Potentials topologisch möglich ist.

Definition 2.1. *Die Gleichung*

$$\mathcal{K} : y^2 = R(\lambda) = - \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_j} \right)$$

definiert eine Riemannsche Fläche unendlichen Geschlechts.

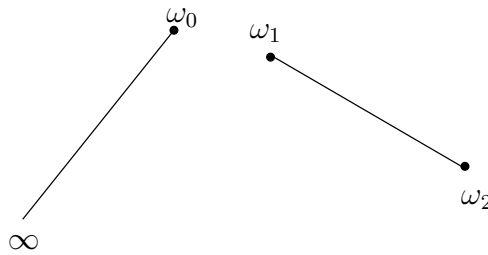


Abbildung 2.3.: Schnitte in \mathbb{C}

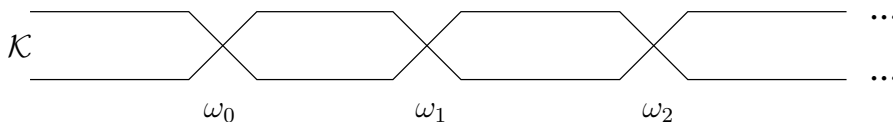


Abbildung 2.4.: Überlagerung von \mathbb{C}

\mathcal{K} wird gebildet, indem man zwei Kopien der komplexen Ebene nimmt, die von ∞ bis ω_0 und von ω_{2i-1} bis ω_{2i} geschnitten ist, siehe Abbildung 2.3. Die Punkte P auf \mathcal{K} sind Paare aus einer Projektion $\lambda = \lambda(P)$ und einem Wert $y = y(P)$ von $\left(- \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_j} \right) \right)^{1/2}$. Die

Blätter sind so verklebt, dass wir von einem zum anderen kommen, indem wir einen Kreis um ∞ oder irgendein ω_i , $i = 0, \dots$ machen und nach zwei Kreisen wieder beim gleichen Blatt landen. Es gibt zwei Punkte auf \mathcal{K} für jeden Punkt in der komplexen Ebene, außer an den einfachen Eigenwerten und bei ∞ , siehe Abbildung 2.4. Die lokalen Koordinaten bei einem Punkt $P_0 = (\lambda_0, y_0)$ sind auf die folgende Art und Weise definiert.

1. Ist $\Delta(\lambda_0)^2 - 1 \neq 0$, dann existiert eine Umgebung U von P_0 , so dass $(\lambda, y) \in U$ genau dann gilt, wenn $y = f(\lambda)$ ist, wobei f eine analytische Funktion mit $y_0 = f(\lambda_0)$ ist. Somit ist $\pi : (\lambda, y) \mapsto \lambda$ eine lokale Koordinate auf U .

2. Ist $\Delta(\lambda_0)^2 - 1 = 0$ und die algebraische Vielfachheit von λ_0 ungerade, dann existiert eine Umgebung U von (λ_0, y_0) , so dass $(\lambda_0 + t^2, y) \in U$ genau dann gilt, wenn $y = f(t)$ ist, wobei f eine analytische Funktion mit $f(0) = y_0$ ist. In diesem Fall kann man durch die Abbildung $(\lambda, y) \mapsto t = \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ eine lokale Koordinate auf U definieren.

3. Ist $\Delta(\lambda_0)^2 - 1 = 0$ und die algebraische Vielfachheit m von λ_0 gerade, dann existieren parametrisierte Scheiben U_1 und U_2 , so dass $U_1 \cup U_2$ eine Umgebung von (λ_0, y_0) und $U_1 \cap U_2 = \{(\lambda_0, y_0)\}$ ist. Also gilt $(\lambda, y) \in U_j$ genau dann, wenn $y = f_j(\lambda)$ ist, wobei die f_j analytische Funktionen mit $f_j(\lambda_0) = y_0$ und $\text{ord}_{\lambda_0}(f_j(\cdot) - y_0) = \frac{1}{2}m$ sind. Hier ist $\pi : (\lambda, y) \mapsto \lambda$ eine lokale Koordinate auf U_1 und U_2 .

2.2. KdV-Hierarchie

Die folgende Darstellung basiert auf Gesztesy und Holden, siehe [10]. Wir werden eine Konstruktion der KdV-Hierarchie über eine Polynomrekursion darstellen. Damit wir diese Hierarchie entwickeln können, benötigen wir zunächst, dass das Potential q glatt ist, diese Einschränkung werden wir später wieder teilweise fallen lassen. L bezeichnet erneut den eindimensionalen Schrödingeroperator.

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Um die KdV-Hierarchie zu konstruieren benötigen wir einen rekursiv definierten zweiten Differentialausdruck, den wir mit P_{2n+1} für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen. Wir definieren zuerst die Funktionen $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$f_0 = 1 \quad f'_l = -\frac{1}{4}f'''_{l-1} + qf'_{l-1} + \frac{1}{2}q'f_{l-1}. \quad (2.2)$$

Rechnet man die ersten explizit aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 1, \\
 f_1 &= \frac{1}{2}q + c_1, \\
 f_2 &= -\frac{1}{8}q'' + \frac{3}{8}q^2 + \frac{1}{2}c_1q + c_2, \\
 f_3 &= \frac{1}{32}q'''' - \frac{5}{16}qq'' - \frac{5}{32}q'^2 + \frac{5}{16}q^3 \\
 &\quad + c_1\left(-\frac{1}{8}q'' + \frac{3}{8}q^2\right) + c_2\frac{1}{2}q + c_3.
 \end{aligned}$$

Hierbei sind die c_l Integrationskonstanten, die beim Lösen von (2.2) entstehen. Man sieht, dass jedes f_l ein Polynom in q und dessen Ableitungen ist.

Nun definieren wir Differentialausdrücke P_{2n+1} der Ordnung $2n+1$ durch

$$P_{2n+1} = \sum_{j=0}^n \left(f_{n-j} \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} f'_{n-j} \right) L^j, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3)$$

Explizit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{d}{dx}, \\
 P_3 &= -\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{2}q \frac{d}{dx} + \frac{3}{4}q' + c_1 \frac{d}{dx}, \\
 P_5 &= \frac{d^5}{dx^5} - \frac{5}{4}q \frac{d^3}{dx^3} + \frac{7}{2}q' \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{3}{2}q^2 - 3q'' \right) \frac{d}{dx} + 2qq' - \frac{15}{16}q''' \\
 &\quad + \frac{3}{8}q^2 - \frac{1}{8}q'' + c_1 \left(-\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{2}q \frac{d}{dx} + \frac{3}{4}q' \right) + c_2 \frac{d}{dx}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Rekursion (2.2) kann der Kommutator von P_{2n+1} mit L explizit ausgewertet werden und ergibt

$$[P_{2n+1}, L] = 2f'_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Das Paar (P_{2n+1}, L) wir als Lax-Paar der n -ten Gleichung der KdV-Hierarchie bezeichnet. Nun können wir die KdV-Hierarchie durch das Verschwinden des Kommutators definieren :

$$-[P_{2n+1}, L] = -2f'_{n+1}(q) = s\text{-KdV}_n(q) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

Explizit ausgerechnet ergibt sich

$$\begin{aligned}
 s\text{-}KdV_0(q) &= -q' = 0, \\
 s\text{-}KdV_1(q) &= \frac{1}{4}q''' - \frac{3}{2}qq' - c_1q' = 0, \\
 s\text{-}KdV_2(q) &= -\frac{1}{16}q'''' + \frac{5}{8}qq''' + \frac{5}{4}q'q'' - \frac{15}{8}q^2q' \\
 &\quad + c_1 \left(\frac{1}{4}q''' - \frac{3}{2}qq' \right) - c_2q' = 0.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung $s\text{-}KdV_1(q) = 0$ ist im stationären Fall, das heißt ohne Zeitabhängigkeit, und für $c_1 = 0$ genau die KdV-Gleichung. Somit ist auch die Bezeichnung als KdV-Hierarchie verständlich.

Definition 2.2. Die Menge der Lösungen von (2.4) mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_l \in \mathbb{C}$ ist die Klasse der algebro-geometrischen Lösungen der KdV. Man bezeichnet die algebro-geometrischen stationären KdV-Lösungen q abgekürzt als KdV-Potentiale.

Im Folgenden werden wir annehmen, dass q die n -te stationäre KdV-Gleichung erfüllt. Damit meinen wir, dass q eine der n -ten stationären KdV-Gleichungen erfüllt, nachdem eine bestimmte Wahl von Integrationskonstanten $c_l \in \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, n$ getroffen wurde.

Nun führen wir ein Polynom F_n vom Grad n mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ ein.

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^n f_{n-j} \lambda^j \quad (2.5)$$

Hier erhält man explizit

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 1, \\
 F_1 &= \lambda + \frac{1}{2}q + c_1, \\
 F_2 &= \lambda^2 + \frac{1}{2}q\lambda - \frac{1}{8}q'' + \frac{3}{8}q^2 + c_1 \left(\frac{1}{2}q + \lambda \right) + c_2, \\
 F_3 &= \lambda^3 + \frac{1}{2}q\lambda^2 + \left(-\frac{1}{8}q'' + \frac{3}{8}q^2 \right) \lambda + \frac{1}{32}q'''' - \frac{5}{16}qq'' - \frac{5}{32}q^2 \\
 &\quad + \frac{5}{16}q^3 + c_1 \left(\lambda^2 + \frac{1}{2}q\lambda - \frac{1}{8}q'' + \frac{3}{8}q^2 \right) + c_2 \left(\lambda + \frac{1}{2}q \right) + c_3.
 \end{aligned}$$

Die Rekursion (2.2) im Zusammenhang mit (2.4) liefert

$$F_n''' - 4(q - z)F_n' - 2q'F_n = 0. \quad (2.6)$$

Multipliziert man dies mit F_n und integriert bezüglich x , so ergibt sich

$$\frac{1}{2}F_n''F_n - \frac{1}{4}F_n'^2 - (q - \lambda)F_n^2 = R_{2n+1}(\lambda). \quad (2.7)$$

Hierbei ist $R_{2n+1}(\lambda)$ ein Polynom vom Grad $2n + 1$ mit höchstem Koeffizient 1. Die Nullstellen bezeichnen wir mit $\{\omega_m\}_{m=0,\dots,2n}$ und können somit

$$R_{2n+1}(\lambda) = \prod_{m=0}^{2n} (\lambda - \omega_m), \quad \omega_m \in \mathbb{C}, \quad m = 0, \dots, 2n$$

schreiben. Mit Hilfe der Gleichung (2.7) lassen sich die Integrationskonstanten c_l explizit in Ausdrücken der Nullstellen $\omega_0, \dots, \omega_{2n}$ von R_{2n+1} bestimmen (vgl. auch Theorem D.1 in [10]). Es gilt mit $\underline{\omega} = \omega_0, \dots, \omega_{2n}$ im speziellen :

$$\begin{aligned} c_0(\underline{\omega}) &= 0, \\ c_1(\underline{\omega}) &= -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2n} \omega_m. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Einschränkung von P_{2n+1} auf den zweidimensionalen Kern von $(L - \lambda)$.

$$\ker(L - \lambda) = \{\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_\infty \text{ meromorph} \mid (L - \lambda)\psi = 0\} \quad (2.8)$$

Dann folgt mit (2.3)

$$P_{2n+1} \Big|_{\ker(L-\lambda)} = \left(F_n(\lambda) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} F_n'(\lambda) \right) \Big|_{\ker(L-\lambda)}. \quad (2.9)$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig davon ob P_{2n+1} und L kommutieren oder nicht. Wir haben eine zusätzliche Beziehung zwischen beiden, wenn sie kommutieren.

Theorem 2.3. *Wenn P_{2n+1} und L kommutieren und somit die n -te KdV-Gleichung erfüllen, dann besteht folgende algebraische Beziehung :*

$$-P_{2n+1}^2 - R_{2n+1}(L) = 0$$

Beweis. Mit Hilfe der Gleichungen (2.9) und (2.7) gilt :

$$\begin{aligned} \left(P_{2n+1} \Big|_{\ker(L-\lambda)} \right)^2 &= - \left(\frac{1}{2} F_n'' F_n - \frac{1}{4} F_n'^2 - (q - \lambda) F_n^2 \right) \Big|_{\ker(L-\lambda)} \\ &= -R_{2n+1}(L) \Big|_{\ker(L-\lambda)} \end{aligned}$$

Somit fallen P_{2n+1}^2 und $-R_{2n+1}(L)$ auf $\ker(L - \lambda)$ zusammen und da $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig war folgt die Behauptung. \square

Nun ist es einfach die Motivation der Rekursion (2.2), die den Beginn unserer KdV-Hierarchie darstellt, zu begründen. Wenn man nach Differentialausdrücken P sucht, die mit L kommutieren, dann kann man folgendermaßen vorgehen. Man schränkt P auf den Kern von $(L - \lambda)$ ein, hierbei kann man systematisch d^2/dx^2 durch $(q - \lambda)$ ersetzen und somit P auf $\ker(L - \lambda)$ zu einem Differentialausdruck erster Ordnung von dem Typ $P|_{\ker(L-\lambda)} = (F(\lambda)d/dx + G(\lambda))|_{\ker(L-\lambda)}$ machen, hierbei sind F und G Polynome. Verlangt man nun Kommutativität von P und L auf $\ker(L - \lambda)$, so folgt $G = -F'/2$ und außerdem liefert $[P, L]|_{\ker(L-\lambda)} = 0$ die Gleichung

$$F''' - 4(q - \lambda)F' - 2q'F = 0. \quad (2.10)$$

Somit haben wir die Identität (2.6) . Wenn wir nun den Ansatz $F(\lambda) = \sum_{l=0}^n f_{n-l}\lambda^l$ in (2.10) einsetzen, bekommen wir die Rekursionsformel für f_l mit der wir gestartet sind.

Dies ist eine Darstellung der KdV-Hierarchie im endlichen Fall, es existiert jedoch auch eine natürliche Erweiterung auf den unendlichen Fall, wie wir in Abschnitt 2.4 darstellen werden.

2.3. Dirichlet-Divisor

$y_2(1, \lambda)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung $1/2$ mit den Nullstellen $\mu_k, k \in \mathbb{N}$, die das Dirichletspektrum bilden. Die Funktion $y_2(1, \lambda)$ ist asymptotisch zu $\sin \sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda}$ und lässt sich als Hadamard-Produkt (siehe (B.2))

$$y_2(1, \lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{n^2 \pi^2} \quad (2.11)$$

schreiben.

Die Dirichleteigenwerte werden nun zu einem Dirichlet-Divisor $\mathcal{P} = p_1 p_2 \dots$ auf der Riemannschen Fläche \mathcal{K} zusammengefasst. Der Punkt $p_i = (\lambda_i, y_i)$ ist gegeben durch die Projektion $\lambda_i = \mu_i$ und $y_i = y(\lambda_i) = \left(-\prod_{j=0}^{\infty} (1 - \mu_i/\omega_j)\right)^{1/2}$. Das Blatt (das Vorzeichen von y_i) wird durch die Normierungskonstanten der Eigenfunktionen bestimmt, wie wir jetzt erklären werden. Die Normierungskonstante ist

$$\int_0^1 y_2^2(x, \mu_i) dx = -y_2(1, \mu_i) y_2'(1, \mu_i).$$

Die Gleichungen $\Delta = \frac{1}{2}(y_1 + y_2')$ und $y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1$ implizieren $y_2' = \Delta \pm (\Delta^2 - 1 - y_2 y_1')^{1/2}$. Zunächst betrachten wir einen einfachen Dirichleteigenwert

$$y_2(1, \mu_i) = 0 \text{ und } \int_0^1 y_2^2(x, \mu_i) dx = -y_2(1, \mu_i) (\Delta(\mu_i) \pm (\Delta^2(\mu_i) - 1)^{1/2}).$$

Sind das einfache Spektrum und die Dirichleteigenwerte bekannt, so sind $y_2(1, \lambda)$ und $\Delta(\lambda)$ als Funktionen von λ bestimmt. Die einzige neue Information, die die Normierungskonstanten liefern, ist das Vorzeichen, also das Blatt von \mathcal{K} auf dem p_i liegt. Andererseits verschwinden die Normierungskonstanten, wenn die Dirichleteigenwerte eine höhere Vielfachheit haben. Auf jeden Fall kann $y_2'(1, \mu_i) \neq 0$ immer benutzt werden um das Blatt zu bestimmen, da $y_2'(1, \mu_i)$ nicht gleichzeitig mit $y_2(1, \mu_i)$ verschwinden kann, weil $y_2(x, \mu_i) \not\equiv 0$ gilt.

Lemma 2.4. *$y_2'(1, \mu_i)$ bestimmt das Blatt auf dem $p_i = (\lambda_i, y_i)$ liegt. Bei einem mehrfachen Dirichleteigenwert müssen die zugehörigen p_i auf demselben Blatt von \mathcal{K} liegen. Eine solche Vielfachheit kann bei einem einfachen periodischen oder antiperiodischen Eigenwert nicht auftreten.*

Betrachte zunächst Abbildung 2.5. Die einzige erlaubte Vielfachheit ist von Typ 3, dies nennen wir eine *nicht-spezielle* Position, 1 und 2 sind *spezielle* Positionen, die bei Dirichlet-Divisoren nicht erlaubt sind.

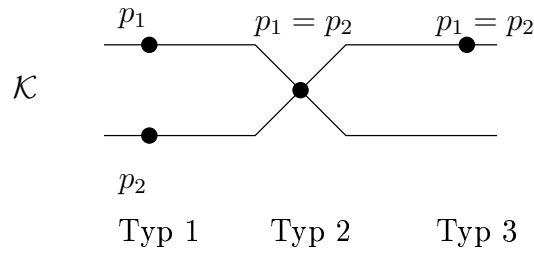


Abbildung 2.5.: Mögliche Positionen der Eigenwerte

Beweis. Bei einem mehrfachen Dirichleteigenwert gilt $\mu_i = \mu_j = \mu$ und nur ein Vorzeichen wird von $y'_2(1, \mu_i)$ bereitgestellt. Also ist $(\mu_i, y_i) = (\mu_j, y_j)$. Die Ableitung von Δ bezüglich λ ist

$$\dot{\Delta} = \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = [y_1 - y'_2] \int_0^1 y_1 y_2 dx - y_2 \int_0^1 y_1^2 dx + y'_1 \int_0^1 y_2^2 dx,$$

wie in (1.12) berechnet. Bei einem einfachen Eigenwert ω_i ist $\dot{\Delta} \neq 0$. Wenn ein Dirichleteigenwert mit ω_i zusammenfällt, so ist

$$y_1(1, \omega_i) = y'_2(1, \omega_i) = \pm 1, \quad y_2(1, \omega_i) = 0,$$

aber $y'_1(1, \omega_i) \neq 0$. Deshalb ist $\dot{\Delta} = \pm y'_1 y_2$, also $y_2 \neq 0$. Somit muss die Vielfachheit des Dirichleteigenwertes 1 sein. \square

Nun können wir das Problem stellen, das wir lösen werden. Wir geben uns Dirichleteigenwerte vor und suchen das zugehörige Potential. Dazu stellen wir Differentialgleichungen auf, die uns die Bewegung der Dirichleteigenwerte bestimmen und entwickeln dann eine Spurformel, mit deren Hilfe wir das Potential berechnen können.

2.4. Dubrovin-Gleichungen und Spurformel

Wir fassen zunächst die benötigten Ergebnisse aus dem ersten Kapitel zusammen, um die KdV-Hierarchie aus Abschnitt 2.2 auch im unendlichen Fall zu definieren. Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x \in \mathcal{I}$.

- (i) Die Menge der periodischen und antiperiodischen Eigenwerte $\{\omega_m\}_{m \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ erfüllt $\sum_{m \in \mathbb{N}} |\omega_m|^{-1} < \infty$, $Re(\omega_m) \rightarrow +\infty$, $Im(\omega_m) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. Die ω_m sind dabei nach ihrem Absolutbetrag angeordnet, wobei die Vielfachheiten berücksichtigt sind.
- (ii) Für die Menge der Dirichleteigenwerte $\{\mu_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ gilt für alle $x \in \mathcal{I}$, dass die Summe $\sum_{j \in \mathbb{N}} (1 - (\mu_j(x))/(\omega_{2j-1}\omega_{2j})^{1/2})$ endlich bleibt. Hierbei nehmen wir den Hauptzweig von $(\omega_{2j-1}\omega_{2j})^{1/2}$, so dass $\arg((\omega_{2j-1}\omega_{2j})^{1/2}) \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$ gilt.
- (iii) Es gilt $\sum_{j \in \mathbb{N}} \omega_{2j-1} + \omega_{2j} - 2\mu_j(x) < \infty$ und $\sum_{j \in \mathbb{N}} (\omega_{2j-1}\omega_{2j} - \mu_j(x)^2)/\omega_{2j} < \infty$ für alle $x \in \mathcal{I}$.

Diese Eigenschaften folgen sofort aus den asymptotischen Eigenschaften der periodischen und antiperiodischen Eigenwerte, sowie denen der Dirichleteigenwerte.

Die Eigenschaft (i) liefert dann zusammen mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\omega_{2j-1}\omega_{2j}|^{-1/2} \leq \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |\omega_{2j-1}|^{-1} \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |\omega_{2j}|^{-1} \right)^{1/2}.$$

Dies unterstützt mit den obigen Eigenschaften die Definition 2.1 der Riemannschen Fläche

$$\mathcal{K} : y^2 = R(\lambda) = - \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_j} \right).$$

Wir nehmen an, dass $R(\lambda)$ eine einfache Nullstelle in ω_0 besitzt. Dies kann durch eine einfache Translation $q(x) \rightarrow q(x) + \lambda_0$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ immer erreicht werden. Außerdem sind in den beiden Funktionen

$$g(P, x) := \frac{1 \prod_{j \in \mathbb{N}} ((\mu_j(x) - \lambda)/(\omega_{2j-1}\omega_{2j})^{1/2})}{2 [(\omega_0 - \lambda) \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - (\lambda/\omega_m))]^{1/2}} \quad (2.12)$$

für $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}$ und

$$F(\lambda, x) := \prod_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mu_j(x) - \lambda}{(\omega_{2j}\omega_{2j-1})^{1/2}} \quad (2.13)$$

alle auftretenden Produkte konvergent. Die Faktoren $\mu_j(x)$ und ω_j in den Produkten sollen gemäß ihrer Vielfachheit wiederholt werden.

Definition 2.5. Die Menge

$$C_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, |\arg(z)| < \varepsilon\}$$

ist ein Kegel entlang der positiven reellen Achse mit der Kegelspitze im Ursprung und Öffnungswinkel ε , $0 < \varepsilon < \pi/2$.

Nun fahren wir fort mit unserer Sammlung der Eigenschaften.

(iv) Die Funktion $g(P, x)$ erfüllt

$$-2g''(P, x)g(P, x) + g'(P, x)^2 + 4(q(x) - \lambda)g(P, x)^2 = 1. \quad (2.14)$$

(v) Für jedes $x \in \mathcal{I}$ gilt

$$g(P, x) = -\frac{i}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{i}{4\sqrt{\lambda^3}}q(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right) \quad (2.15)$$

für $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus C_\varepsilon$.

(vi) Für $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus C_\varepsilon$ gilt gleichmäßig

$$g(P, x) = -\frac{i}{2\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad (2.16)$$

$$g'(P, x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (2.17)$$

bezüglich x , so lange x in kompakten Teilintervallen von \mathcal{I} variiert.

Die Eigenschaft (iv) folgt durch Nachrechnen. Um die Eigenschaften (v) und (vi) zu zeigen iteriert man die Integralgleichungen für $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$, integriert partiell und benutzt das Riemann-Lebesgue-Lemma, wie in Theorem. Außerdem schreiben wir

$$g(P, x) = \frac{y_2(x, \lambda, q)}{2\sqrt{\Delta^2 - 1}}$$

und setzen die asymptotischen Formeln ein. Wir entwickeln die Theorie für $x \in \mathcal{I}$ und nicht für $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$), um ein mögliches meromorphes Verhalten von $q(x)$ einzubeziehen. Wir beschränken uns auch nicht auf glatte, sondern auf einmal stetig

differenzierbare Potentiale $q \in C^1(\mathcal{I})$. Nun folgen einige Überlegungen, um die KdV-Hierarchie auch im unendlichen Fall zu definieren. Leiten wir (2.14) nach x ab, so erhalten wir eine Differentialgleichung dritter Ordnung

$$-g'''(P, x) + 4(q(x) - \lambda)g'(P, x) + 2q'(x)g(P, x) = 0, \quad P \in \mathcal{K}, x \in \mathcal{I}. \quad (2.18)$$

Wir führen die Funktion $H(\lambda, x)$ ein als

$$H(\lambda, x) = \frac{1}{2}F''(\lambda, x) + (\lambda - q(x))F(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathcal{I}. \quad (2.19)$$

Setzen wir nun $g(P, x) = F(\lambda, x)/2y(P)$ in (2.14) und (2.18) ein, so ergibt sich

$$-\frac{1}{2}F''(\lambda, x)F(\lambda, x) + (q(x) - \lambda)F(\lambda, x)^2 + \frac{1}{4}F'(\lambda, x)^2 = R(\lambda) \quad (2.20)$$

und

$$-F'''(\lambda, x) + 4(q(x) - \lambda)F'(\lambda, x) + 2q'(x)F(\lambda, x) = 0.$$

Kombinieren wir nun (2.19) und (2.20), so erhalten wir

$$-R(\lambda) + \frac{1}{4}F'(\lambda, x)^2 = F(\lambda, x)H(\lambda, x).$$

Lemma 2.6. *Es sei $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}$. Dann gelten die Gleichungen*

$$\left[g(P, x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2}g'(P, x), L \right] \Big|_{\ker(L-\lambda)} = 0, \quad (2.21)$$

$$\left(\left(g(P, x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2}g'(P, x) \right) \Big|_{\ker(L-\lambda)} \right)^2 = \frac{1}{4} \Big|_{\ker(L-\lambda)}. \quad (2.22)$$

Beweis. (2.21) folgt direkt aus (2.18) und (2.22) folgt aus (2.14). □

Um die KdV-Hierarchie vollständig zu definieren, führen wir als letzten Schritt Differentialausdrücke unendlicher Ordnung ein, analog zur Definition von P_{2n+1} aus (2.3).

$$P_\infty := F(L, x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2}F'(L, x)$$

$$P_\infty \Big|_{\ker(L-\lambda)} = \left(F(L, x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2}F'(L, x) \right) \Big|_{\ker(L-\lambda)}$$

Aus Lemma 2.6 folgt

$$\begin{aligned} [P_\infty, L] \Big|_{\ker(L-\lambda)} &= \left(-\frac{1}{2}F'''(\lambda, x) + 2(q(x) - \lambda)F'(\lambda, x) \right. \\ &\quad \left. + q'(x)F(\lambda, x) \right) \Big|_{\ker(L-\lambda)} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\left(P_\infty \Big|_{\ker(L-\lambda)} \right)^2 = R(L) \Big|_{\ker(L-\lambda)}.$$

Analog zu (2.4), (2.5) und (2.6) können wir die stationäre KdV-Gleichung ebenfalls für $n = \infty$ definieren durch

$$s\text{-KdV}_\infty(q) = -\frac{1}{2}F'''(0, x) - 2q(x)F'(0, x) + q'(x)F(0, x) = 0. \quad (2.23)$$

Somit haben wir auch im unendlichen Fall die KdV-Hierarchie vollständig definiert.

Wir reduzieren nun das Problem der Lösung der KdV-Hierarchie auf das Problem der eindeutigen Lösbarkeit eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung, die Dubrovin-Gleichungen.

Lemma 2.7. *Das Potential q erfülle die n -te KdV-Gleichung (2.4)*

$$[P_{2n+1}, L] = 0$$

oder im Falle $n = \infty$ die Gleichung (2.23)

$$[P_\infty, L] = 0.$$

Außerdem seien die Dirichleteigenwerte μ_i verschieden. Die Punkte $p_i = (\mu_i, y_i)$ auf der Riemannschen Fläche erfüllen dann die Dubrovin-Gleichungen

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x} = -\frac{\left(\prod_{j \in \mathbb{N}} (\mu_j(x) - \lambda) \right)'}{\prod_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \neq i}} (\mu_j - \mu_i)}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.24)$$

Nun geben wir uns noch Startbedingungen

$$\{(\mu_i(x_0), y_i(x_0))\} \subset \mathcal{K} \quad (2.25)$$

auf der Riemannschen Fläche für ein x_0 vor, wobei die $\mu_i(x_0)$ verschieden sind. Dann existiert ein offenes Intervall $\Omega_\mu \subset \mathbb{C}$ mit $x_0 \in \Omega_\mu$, so dass das Anfangswertproblem (2.24), (2.25) eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis. Dass μ_i die Differentialgleichung (2.24) erfüllt, folgt aus (2.13) und

$$y^2 = -\frac{1}{4}F'(\lambda).$$

Bei der Eindeutigkeit ist der einzige nichttriviale Fall, wenn μ_k einen der Verzweigungspunkte ω_i trifft und somit die rechte Seite von (2.24) verschwindet. Dazu nehmen wir

$$\mu_k \rightarrow \omega_i \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0 \in \Omega_\mu$$

an, für beliebige $k, i \in \mathbb{N}$. Außerdem führen wir für x in einem offenen Intervall mit Zentrum x_0

$$\zeta_k(x_0) = \eta(\mu_k(x_0) - \omega_i)^{1/2}, \quad \eta = \pm 1, \quad \mu_k(x) = \omega_i + \zeta_k(x)^2$$

ein. Dann wird die Differentialgleichung (2.24) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_k(x)}{\partial x} \stackrel{x \rightarrow x_0}{=} c(\eta) & \left(\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{\infty} (\omega_i - \omega_m) \right)^{1/2} \\ & \times \left(\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} (\omega_i - \mu_m(x))^{-1} \right) (1 + O(\zeta_k(x)^2)). \end{aligned}$$

Dies gilt für ein $|c(\eta)| = 1$ und somit ist die Eindeutigkeit gezeigt. □

Dass auch bei Kollisionen ($\mu_j = \mu_i$) die Gleichungen (2.24) eindeutig lösbar sind, ist etwas raffinierter und wird von Birnir in [1] und [2] ausgeführt. Der Ansatz ist jedoch zu ausführlich, um ihn im Rahmen dieser Arbeit zu besprechen. Ein wichtiger Punkt ist hierbei, dass der Divisor nicht-spezial bleibt, wie Typ 3 in Abbildung 2.5.

Nun suchen wir bei gegebenen Dirichleteigenwerten das Potential und entwickeln dazu eine Spurformel. Im Fall reeller und komplexwertiger algebro-geometrischer Potentiale ist diese Spurformel sehr gut bekannt, im Zusammenhang mit allgemeinen komplexwertigen Potentialen und Kurven unendlichen Geschlechts wurde diese das erste Mal von Gesztesy [9] bewiesen. Wir beschränken uns auf den Fall $q(x) \in C^1$, um eine einfachere Betrachtung zu erhalten. Wir entwickeln eine Formel, die uns das Potential $q(x)$ in Ausdrücken der $\{\mu_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ darstellt.

Lemma 2.8. *Es gilt für $x \in \mathcal{I}$*

$$q(x) = \omega_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} (\omega_{2j-1} + \omega_{2j} - 2\mu_j(x)). \quad (2.26)$$

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften (i)-(iii) erhält man für $x \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} & \log \left(\left(\frac{\prod_{j \in \mathbb{N}} (\mu_j(x) - \lambda)^2 (\omega_{2j-1} \omega_{2j})^{-1}}{\prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - \frac{\lambda}{\omega_m})} \right)^{1/2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \log \left(\frac{(\mu_j(x) - \lambda)^2}{(\omega_{2j-1} \omega_{2j}) (1 - \frac{\lambda}{\omega_{2j-1}}) (1 - \frac{\lambda}{\omega_{2j}})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \log \left(\frac{\lambda^2 - 2\mu_j(x)\lambda + \mu_j(x)^2}{\lambda^2 (1 - \frac{\omega_{2j-1}}{\lambda}) (1 - \frac{\omega_{2j}}{\lambda})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \log \left(1 + \frac{\omega_{2j-1} + \omega_{2j} - 2\mu_j(x)}{\lambda (1 - \frac{\omega_{2j-1}}{\lambda}) (1 - \frac{\omega_{2j}}{\lambda})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_j(x)^2 - \omega_{2j-1} \omega_{2j}}{\lambda^2 (1 - \frac{\omega_{2j-1}}{\lambda}) (1 - \frac{\omega_{2j}}{\lambda})} \right) \\ &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\omega_{2j-1} + \omega_{2j} - 2\mu_j(x)) + o(\lambda^{-1}) \text{ für } \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C} \setminus C_\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.27)$$

In Bezug auf den $o(\lambda^{-1})$ -Term in (2.27) haben wir die Gleichung

$$\frac{\mu_j(x)^2 - \omega_{2j-1} \omega_{2j}}{\lambda^2 (1 - \frac{\omega_{2j-1}}{\lambda}) (1 - \frac{\omega_{2j}}{\lambda})} = \lambda^{-1} \frac{\mu_j(x)^2 - \omega_{2j-1} \omega_{2j}}{(1 - \frac{\omega_{2j-1}}{\lambda}) (\lambda - \omega_{2j})},$$

die Eigenschaft (iii) und den Satz über die dominierte Konvergenz für diskrete Maße benutzt. Zusammen mit

$$g(P, x) = \left(\frac{\frac{1}{4(\omega_0 - \lambda)} \prod_{j \in \mathbb{N}} ((\mu_j(x) - \lambda))^2 (\omega_{2j-1} \omega_{2j})^{-1}}{\prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - \frac{\lambda}{\omega_m})} \right)^{1/2}$$

für $P = (\lambda, y)$, liefert uns (2.27)

$$g(P, x) = \frac{1}{2\sqrt{\omega_0 - \lambda}} \exp \left(\frac{1}{2\lambda} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\omega_{2j-1} + \omega_{2j} - 2\mu_j(x)) + o(\lambda^{-1}) \right).$$

Setzen wir nun die Taylorreihe der Exponentialfunktion ein und benutzen außerdem $(\omega_0 - \lambda)^{-1/2} \rightarrow -i\lambda^{-1/2}$ für $\lambda \rightarrow \infty$, dann ergibt sich

$$g(P, x) = -\frac{i}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{i}{4\sqrt{\lambda^3}} \left(\omega_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} (\omega_{2j-1} + \omega_{2j} - 2\mu_j(x)) \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right) \quad (2.28)$$

für $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus C_\varepsilon$. Wenn man nun (2.28) mit (2.15) vergleicht, ergibt sich die Spurformel (2.26). \square

Eine weitere interessante Fragestellung findet man in [24] von Marletta und Weikard. Hierbei hat man nur die ersten N Dirichleteigenwerte mit einer Genauigkeit ε gegeben und möchte aus diesen eine Stabilitätsaussage für das Potential erhalten. Bei nur endlich vielen gegebenen Werten bekommt man unendlich viele Potentiale als Lösung und es erscheint unmöglich Stabilitätsergebnisse zu erhalten. Die Standardphilosophie der numerischen Analysis ist einen Algorithmus zu entwickeln, der eine der unendlich vielen möglichen Lösungen auswählt. Um diesen Algorithmus zu testen führt man anschließend numerische Versuche durch, in denen endliche Spektraldaten aus bekannten Potentialen generiert werden. Dabei benutzt man eine Norm um den Unterschied zwischen dem bekannten Potential und dem wiederhergestellten Potential zu bestimmen. Diese Prozedur kann nicht sinnvoll sein, wenn man nicht beweisen kann, dass alle der unendlich vielen Lösungen „nahe“ beieinander liegen. In dem Artikel [24] wird bewiesen, dass dieses Ergebnis stimmt, man muss aber eine relativ schwache Norm benutzen.

Zunächst zitieren wir zwei andere Stabilitätsaussagen. In [32] schätzt Ryabushko die Differenz zweier Potentiale q_1 und q_2 mit Mittelwert 0 in $L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ ab. Bei beiden sollen die Eigenwerte $\mu_n(q)$ für Dirichletrandbedingungen an beiden Rändern und die Eigenwerte $\lambda_n(q)$ für Dirichletrandbedingungen bei 0 und Neumann-Randbedingungen bei 1 bekannt sein. Mit diesen Bezeichnungen beweist er die Formel

$$\|q_1 - q_2\| \leq C (\|\lambda(q_1) - \lambda(q_2)\| + \|\mu(q_1) - \mu(q_2)\|).$$

Ein anderes Ergebnis stammt von McLaughlin [28]. Sind die Mittelwerte der Potentiale 0, dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus zwischen den Potentialen in $L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ und Folgen $\{\lambda_n - n^2\pi^2, \rho_n\}$ in $l^2 \times l^2$, wobei die $\{\rho_n\}$ Normierungskonstanten sind.

Nun zu der Aussage von Marletta und Weikard [24]. Es seien $q, q_0 \in L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ komplexwertige Potentiale und $\mu_j(q), j \in \mathbb{N}$ die Dirichleteigenwerte. Außerdem seien $\lambda_j, j \in \mathbb{N}$ die Eigenwerte zu dem Randwertproblem

$$-y'' + q(x)y + \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Beide Eigenwerte sollen mit Vielfachheiten gezählt werden. Analog definiert man $\lambda_j(q_0)$ und $\mu_j(q_0)$.

Theorem 2.9. *Es seien q und q_0 zwei Potentiale in $L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ mit dem gleichen Mittelwert. Definiere $a_j := |\lambda_j(q) - \lambda_j(q_0)|$ und $b_j := |\mu_j(q) - \mu_j(q_0)|$, außerdem seien $\varepsilon_0 \geq 0$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ fest. Dann existiert eine Konstante C , die nur von q_0, ε_0 und N_0 abhängt, so dass die folgende Aussage für alle $x \in [0, 1]$ gilt :*

Ist $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $N \geq N_0$ und $\max\{a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N\} \leq \varepsilon$, dann gilt

$$\left| \int_0^x (q(t) - q_0(t)) dt \right| \leq C e^{\|q\|} \left(\varepsilon \log N + \frac{\|a\| + \|b\|}{\sqrt{N}} \right).$$

3. Parametrisierung der Hill-Diskriminante

In diesem Kapitel werden wir die Parametrisierung des Spektrums darstellen, wie sie in dem Artikel [36] von Tkachenko präsentiert wird. Die Mengen in der komplexen Ebene, die das Spektrum eines Schrödingeroperators sein können, werden dabei durch bestimmte Riemannsche Flächen parametrisiert. Dazu wird eine Menge \mathbf{IC} von Riemannschen Flächen mit einigen Eigenschaften eingeführt, unter anderem sind die Ordnungen aller Verzweigungspunkte endlich.

3.1. Resultate

Vorab wiederholen wir die Schreibweise, damit sie wieder präsent wird. Wir betrachten den Schrödingeroperator

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \tag{3.1}$$

mit einem 1-periodischen Potential $q(x)$ und die dazugehörige Hillgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{3.2}$$

mit einem komplexen Parameter λ . Wir bezeichnen mit $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ die Lösungen zu dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda, q) &= y_2'(0, \lambda, q) = 1, \\ y_1'(0, \lambda, q) &= y_2(0, \lambda, q) = 0. \end{aligned}$$

Die Monodromie ist

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(1, \lambda, q) & y_2(1, \lambda, q) \\ y_1'(1, \lambda, q) & y_2'(1, \lambda, q) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Aufgrund der Wronski-Identität ist die Determinante dieser Matrix 1. Die Funktion

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}(y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda))$$

ist die Hill-Diskriminante. Das folgende Theorem trifft eine Aussage über eine Parametrisierung des Spektrums des Schrödingeroperators.

Theorem 3.1. *Das Spektrum des Schrödingeroperators stimmt überein mit der Menge*

$$\sigma(L) = \{\lambda = \kappa^2 | \Delta(\kappa) \in \mathbb{R}, \Delta(\kappa) \in [-1, 1]\}. \quad (3.4)$$

Den Beweis für dieses Theorem im Falle reeller Potentiale findet man in [35], komplexe Potentiale werden in [31], [33] und [37] betrachtet.

Ab sofort sei immer $\lambda = \kappa^2$. Eine Funktion u heißt gerade, wenn $u(-x) = u(x)$ gilt.

Theorem 3.2. *Eine Funktion $\delta(\kappa)$ ist genau dann eine Hill-Diskriminante, wenn sie eine ganze gerade Funktion ist, die sich als*

$$\delta(\kappa) = \cos \kappa + \frac{Q}{\kappa} \sin \kappa - \frac{Q^2}{2\kappa^2} \cos \kappa + \frac{f(\kappa)}{\kappa^2} \quad (3.5)$$

darstellen lässt. Hierbei ist Q eine komplexe Zahl und f eine ganze Funktion, die die Bedingungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\kappa)|^2 d\kappa < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty \quad (3.6)$$

erfüllt.

Einen Beweis zu diesem Theorem findet man in [38].

Nun werden wir die Konstruktion der Klasse **IC** beschreiben, die uns später die Hill-Diskriminante parametrisieren wird. Wir beginnen mit Kopien der komplexen Ebene, die wir mit S_n für alle $n \neq 0$ bezeichnen. Jede dieser komplexen Ebenen schneiden wir entlang eines Systems von sich nicht schneidenden glatten Kurven mit beschränkter Krümmung. Diese Kurven sollen an verschiedenen endlichen Punkten starten und asymptotisch in Richtung unendlich parallel zur imaginären Achse verlaufen. Wir nehmen an, dass die beiden Seiten von allen Schnitten in der Menge $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n \neq 0}$ in Paare aufgespalten werden können. Diese Paare sollen so zueinander passen, dass jedes Paar

aus Seiten identischer Schnitte besteht. Nun verkleben wir jedes Paar an den identischen Punkten und machen \mathcal{S} somit zu einer Riemannschen Fläche. Bilden zwei Seiten eines Schnittes ein Paar, dann wird nach dem Verkleben der Startpunkt dieses Paares zu einem gewöhnlichen Punkt. Ansonsten müssen sich mehr als zwei Seiten von identischen Schnitten bei demselben Punkt treffen, dieser wird dann zu einem Verzweigungspunkt von \mathcal{S} .

Jeder Punkt $w \in S_n$ kann für $n \neq 0$ mit dem für alle n gleichen Punkt $w \in \mathbb{C}$ identifiziert werden. Diese Identifikation liefert eine verzweigte Überlagerung von \mathbb{C} , sie definiert die Projektion von \mathcal{S} auf \mathbb{C} .

Eine Riemannsche Fläche \mathcal{S} gehört zu der Klasse \mathbf{IC} , wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt.

- i) \mathcal{S} ist einfach zusammenhängend und alle Verzweigungspunkte haben endliche Ordnung.
- ii) \mathcal{S} besteht aus Blättern, die mit $\pm n$, $n = 1, 2, \dots$ nummeriert sind, so dass die Verzweigungspunkte auf den Blättern S_n und S_{-n} zusammenfallen und die gleiche Verzweigungsordnung haben. Der Operator J , der einen Punkt $w \in S_n$ auf den Punkt $w \in S_{-n}$ abbildet, ist eine holomorphe Involution auf \mathcal{S} . Beide Punkte w haben dabei dieselbe Projektion auf \mathbb{C} .
- iii) Für das Blatt S_n existieren für fast alle n nur gemeinsame Verzweigungspunkte mit den Blättern S_{n-1} und S_{n+1} . Die Verzweigungsordnung dieser Punkte ist 1 und wenn γ_{n-1} bzw. γ_n die Projektionen dieser Punkte auf \mathbb{C} sind, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n - \gamma_n| n^2 < \infty. \quad (3.7)$$

Jede Riemannsche Fläche dieser Klasse ist parabolisch, also konform äquivalent zur komplexen Ebene. Nun folgt die Hauptaussage des Artikels von Tkachenko.

Theorem 3.3. *Die Hill-Diskriminante $\Delta(\lambda)$ der Hillgleichung mit einem komplexwertigen Potential $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ mit Periode 1 bildet die komplexe Ebene konform und isomorph auf eine Riemannsche Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$ ab. Ist umgekehrt eine Riemannsche Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$ gegeben, so existiert ein Schrödingeroperator, so dass seine Hill-Diskriminante die komplexe Ebene konform und isomorph auf \mathcal{S} abbildet.*

Zunächst stellen wir einige Vorüberlegungen an, bevor wir dieses Theorem beweisen. Sei P eine Projektion der Riemannschen Fläche \mathcal{S} auf \mathbb{C} . Eine Uniformisierung Φ (d.h. eine uniforme Abbildung) von einer Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$, so dass $u = P\Phi^{-1}$ eine ganze Funktion ist, ist bis auf eine lineare Funktion bestimmt. Diese lineare Funktion kann aufgrund Theorem 3.3 so gewählt werden, dass u die Form (3.5) hat. Nun fordern wir zusätzlich, dass Φ^{-1} einen Punkt, der sich entlang der positiven reellen Achse nach unendlich bewegt, auf einen Punkt abbildet, der sich auf den Blättern S_n bewegt für n gegen unendlich. Ist diese Forderung ebenfalls erfüllt, so ist die Uniformisierung eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie als *kanonische Uniformisierung*. In der folgenden lokalen Betrachtung identifizieren wir Φ^{-1} mit der ganzen Funktion $u = P\Phi^{-1}$. Sei $I(\mathcal{S})$ die Menge aller Punkte der Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$, deren Projektionen im Intervall $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ liegen. Kombinieren wir nun die Theoreme 3.1 und 3.2, so erhalten wir die folgende Beschreibung des Spektrums der Hillgleichung.

Theorem 3.4. *Eine Menge $\sigma \subset \mathbb{C}$ ist genau dann das Spektrum eines Schrödingeroperators mit einem Potential $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ der Periode 1, wenn*

$$\sigma = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu = \Phi(w)^2, w \in I(\mathcal{S})\} \quad (3.8)$$

gilt, wobei Φ die kanonische Uniformisierung von \mathcal{S} ist.

Ein Vorteil dieses Ansatzes offenbart sich, wenn man kleine Störungen von Potentialen betrachtet. Einerseits können wir für jedes beliebige Potential einige Schnitte etwas verlängern, um eine Riemannsche Fläche zu erhalten, bei der keine Verzweigungspunkte in das Intervall $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ projiziert werden. Dieses Verfahren zeigt, dass das Spektrum eines typischen Schrödingeroperators keine Spitzen enthält. Andererseits kann man auch die Enden einiger Schnitte leicht stören, um so eine Fläche zu erhalten, für die $\gamma_n = (-1)^n$ für fast alle n gilt. Wird dies kombiniert mit kleinen Störungen des Dirichletspektrums, so kann man dies benutzen, um zu zeigen, dass die Potentiale mit endlich vielen Bandlücken dicht im Raum aller Potentiale $L^2_{\mathbb{C}}[0, 1]$ liegen.

Nun nehmen wir zwei konform äquivalente Flächen $\mathcal{S}_i \in \mathbf{IC}, i = 1, 2$, d.h. es existiert eine injektive analytische Abbildung $\Psi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Sind Φ_1 und Φ_2 die kanonischen Uniformisierungen von \mathcal{S}_1 bzw. \mathcal{S}_2 , dann ist die Funktion $w = \Phi_2\Psi\Phi_1^{-1}$ eine konforme Abbildung der komplexen Ebene auf sich selbst, wobei unendlich ein Fixpunkt ist. Somit lässt sich w schreiben als $w = a\lambda + b$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ existiert eine Umgebung V_z und eine Funktion ψ_z , die in V_z analytisch ist, so dass $\psi'_z(z) \neq 0$ und $\delta_2(a\lambda + b) \equiv \psi_z(\delta_1(\lambda))$ für $\lambda \in V_z$ gilt. Schreiben wir dies an allen kritischen Punkten von $\delta_1(\lambda)$, dann zeigt diese Gleichheit, dass die Nullstellenmengen von $\delta'_2(a\lambda + b)$ und $\delta'_1(\lambda)$ zusammenfallen,

wenn man die Vielfachheiten mit berücksichtigt. Betrachtet man zusätzlich noch die asymptotischen Verteilungen der Nullstellen beider Funktion, die aus (3.5) folgt, so ergibt sich $a = 1$ und $b = 0$. Somit ist $\delta'_2(\lambda)/\delta'_1(\lambda)$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen, also konstant. Da sowohl δ_1 als auch δ_2 die Form (3.5) haben, müssen sie identisch sein und die Mengen (3.8), die durch konform äquivalente Flächen definiert werden, fallen zusammen. Also ist die Parametrisierung der Spektren aus Theorem 3.4 invariant unter konformen Abbildungen.

In der Wahl von Schnitten, die S_n definieren, haben wir einen gewissen Freiraum, sobald die Startpunkte gewählt wurden. Eine kleine lokale Änderung eines Schnittes, die sich nicht mit dem Startpunkt überschneidet, produziert eine konform äquivalente Riemannsche Fläche und somit die gleiche Menge (3.8). Dies erlaubt uns, falls nötig, Schnitte in S_n durch Kurven mit zusammenfallenden Endpunkten zu ersetzen. Im Speziellen können wir annehmen, dass für fast alle n die Punkte aller Schnitte außerhalb eines genügend großen Kreises auf der reellen Achse liegen.

Haben wir die Schnitte S_n für alle $n \neq 0$ fixiert, so können wir auch die Paarbildung etwas variieren. Eine Variation der Paarbildung produziert konform nichtäquivalente Flächen mit verschiedenen Mengen (3.8). Im nächsten Abschnitt werden wir ein Beispiel hierfür angeben.

Um die obige Betrachtung zusammenzufassen, können wir sagen, dass alle möglichen Spektren eines Schrödingeroperators 1:1 parametrisiert sind durch die Klasse **IC**.

3.2. Beispiele

Um das Theorem 3.4 zu veranschaulichen, werden wir nun einige Flächen aus der Klasse **IC** betrachten und die Menge (3.8) bestimmen, die von der jeweiligen Fläche erzeugt wird.

Beispiel 3.5. Sei S_n für $n \neq 0$ die komplexe Ebene, geschnitten entlang der Streifen $c_n^- = (-\infty, 1]$ und $c_n^+ = [1, \infty)$ auf der reellen Achse. Wir kleben nun die gegenüberliegenden Seiten von Paaren zusammen, (c_1^+, c_{-1}^+) , (c_{2n+1}^-, c_{2n+2}^-) , (c_{2n+2}^+, c_{2n+3}^+) für $n \geq 0$, sowie für $n \leq 0$ die Paare (c_{2n-1}^-, c_{2n-2}^-) , (c_{2n-2}^+, c_{2n-3}^+) . Somit erhalten wir die Riemannsche Fläche der Funktion

$$\arccos w = - \int_1^w \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

3. Parametrisierung der Hill-Diskriminante

die invers zu $\delta(\kappa) = \cos \kappa$ ist. Alle Verzweigungspunkte haben die Ordnung 1 und da $\gamma_n = (-1)^n$ für alle $n \neq 0$ gilt, ist die Gleichung (3.7) offensichtlich erfüllt.

Beispiel 3.6. Wir modifizieren die obige Konstruktion etwas und ersetzen die Schnitte c_n^- und c_n^+ durch $c_n^- = (-\infty, -\gamma_{|n|}^-]$ bzw. $c_n^+ = [\gamma_{|n|}^+, \infty)$, wobei $\gamma_n^\pm > 0$, $\gamma_{2n-1}^- = \gamma_{2n}^-$ und $\gamma_{2n}^+ = \gamma_{2n+1}^+$ für $n \geq 1$ gilt. Außerdem soll (3.7) erfüllt sein mit $\gamma_{2n} = \gamma_{2n}^+$, $\gamma_{2n+1} = \gamma_{2n}^-$. Mit den gleichen Paaren von Schnitten wie in Beispiel 3.5 ist \mathcal{S} eine Riemannsche Fläche der Klasse **IC** und alle Verzweigungspunkte haben Ordnung 1.

Beispiel 3.7. Wir wählen zwei ganze Zahlen $m = 2p + 1 \geq 3$ und $k = 2r \geq 4$. Für $|n| \leq m$ und $|n| \geq m + k + 1$ seien die Mengen S_n wie in Beispiel 3.5 definiert. Wir definieren die Mengen $S_{m+1}, S_{m+k}, S_{-m-1}, S_{-m-k}$ als die komplexe Ebene mit zwei Schnitten $c^- = (-\infty, -1]$ und $c^+ = [0, \infty)$ auf jeder dieser Mengen. Außerdem seien die Mengen S_j für $m + 2 \leq |j| \leq m + k - 1$ die komplexe Ebene mit nur einem Schnitt $c^+ = [0, \infty)$. Um eine Riemannsche Fläche aus der Klasse **IC** zu erhalten, verkleben wir zuerst alle Schnitte, die zu S_n gehören für $|n| \leq m$ und $|n| \geq m + k + 1$ miteinander wie in Beispiel 3.5. Somit bleiben beide Seiten der Schnitte c^- auf den Blättern $S_{m+1}, S_{m+k}, S_{-m-1}, S_{-m-k}$ unverklebt. Der nächste Schritt ist die gegenüberliegenden Seiten von c^- auf den Paaren $(S_m, S_{m+1}), (S_{m+k}, S_{m+k+1}), (S_{-m}, S_{-m-1}), (S_{-m-k}, S_{-m-k-1})$ zusammenzukleben. Danach verkleben wir die oberen Seiten der Schnitte c^+ auf $S_{m+1}, \dots, S_{m+k+1}, S_{-m-1}, \dots, S_{-m-k+1}$ mit den unteren Seiten derselben Schnitte auf $S_{m+2}, \dots, S_{m+k}, S_{-m-2}, \dots, S_{-m-k}$. Als letztes verkleben wir die unteren Seiten von c^+ auf S_{m+1} und S_{-m-1} mit den oberen Seiten derselben Schnitte auf S_{m+k} und S_{-m-k} . Die resultierende Riemannsche Fläche besitzt zwei Verzweigungspunkte der Ordnung $k - 1$, die auf $\lambda = 0$ projiziert werden, alle anderen Verzweigungspunkte der Ordnung 1 werden entweder auf -1 oder 1 projiziert.

Die Menge $I(\mathcal{S})$ ist für die Riemannsche Fläche aus Beispiel 3.5 die Vereinigung der Intervalle $[-1, 1]$ auf jedem Blatt S_n . Diese Menge wird durch die Funktion $\arccos w$ isomorph auf die reelle Achse abgebildet, dies impliziert $\sigma = [0, \infty)$. Es gibt eine große Klasse von Schrödingeroperatoren mit diesem Spektrum, aber nur einer ist selbstadjungiert, nämlich der mit dem freien Potential $q \equiv 0$.

Kommen wir nun zu Beispiel 3.6. Wir setzen $J(\mathcal{S}) = \bigcup_{n \neq 0} [-\gamma_n^-, \gamma_n^+]$. Da jedes Gebiet S_n invariant unter der komplexen Konjugation $\bar{j} = jz$ ist und j die Seiten der beiden Schnitte von S_n vertauscht, kann j als antiholomorphe Involution auf \mathcal{S} fortgesetzt werden. Wenn wir die kanonische Uniformisierung Φ von \mathcal{S} benutzen, so können wir j in die komplexe Ebene transformieren und wir erhalten, dass auch $j^* = \Phi j \Phi^{-1}$ bei geeigneter

Wahl eines Koordinatensystems eine komplexe Konjugation ist. Somit ist die Funktion $\delta = P\Phi^{-1}$ für reelle κ reell. Die Menge der Fixpunkte von j fällt zusammen mit der Menge $J(\mathcal{S})$, die Fixpunkte von j^* füllen die reelle Achse aus. Das bedeutet, dass die reelle Achse durch $\delta(\kappa)$ surjektiv auf die Menge $J(\mathcal{S})$ abgebildet wird. Außerdem wird ein offenes Intervall $(-\gamma_n^-, \gamma_n^+)$ durch Φ auf ein Intervall $(\mu_n^-, \mu_n^+) \subset \mathbb{R}$ abgebildet, das keine kritischen Punkte von $\delta(\kappa)$ enthält. Somit ist diese Funktion monoton in (μ_n^-, μ_n^+) und nimmt die Werte γ_n^- und γ_n^+ an den Extremstellen an.

Sei nun $\gamma_n^\pm \geq 1$ für alle $n \neq 0$. Dann ist $[-1, 1] \subset [-\gamma_n^-, \gamma_n^+]$ und das Intervall $[-1, 1] \subset S_n$ wird durch Φ isomorph auf ein Intervall auf der reellen Achse abgebildet, das von den benachbarten Intervallen getrennt ist durch Lücken, die verschwinden können, wenn entweder $\gamma_n^- = 1$ oder $\gamma_n^+ = 1$ ist. Somit ist die Menge σ , definiert durch (3.8) reell und besitzt eine Bandstruktur. Da jede Lücke genau einen Punkt mit $\delta'(\kappa) = 0$ enthält und da alle Verzweigungspunkte von \mathcal{S} die Ordnung 1 haben, sind die kritischen Punkte von $\delta(\kappa)$ nicht ausgeartet. Es impliziert, dass

$$\theta(\kappa) = - \int_0^\lambda \frac{\delta'(t)}{\sqrt{1 - \delta^2(t)}} dt, \quad \text{Im } \lambda > 0$$

eine konforme Abbildung von $\{\lambda \mid \text{Im } \lambda > 0\}$ auf ein kammartiges Gebiet ist und die Darstellung $\delta(\lambda) = \cos \theta(\lambda)$ gilt.

Ein anderer Extremfall in Beispiel 3.6 tritt auf, wenn $0 < \gamma_n^\pm \leq 1$ für alle $n \neq 0$ gilt. Dann ist die Funktion $\delta(\kappa)$ wieder reell für reelles κ und erfüllt $-1 \leq \delta(\kappa) \leq 1$. Somit ist der ganze Strahl $[0, \infty)$ ein Teil des Spektrums. Gilt $0 < \gamma_n^+ < 1$ für ein n , dann ist der Teil der Menge $I(\mathcal{S})$, der zu γ_n^+ gehört, in einer Umgebung eines Verzweigungspunktes zusammengesetzt aus vier Intervallen mit nur einem gemeinsamen Punkt. Nach Theorem 3.4 erscheint in dem Spektrum eine nichttriviale Spitze, die sich mit der reellen Achse in einem Punkt $\mu_l = \kappa_l^2$ schneidet, so dass $\delta(\kappa_l) = \gamma_l^+$ gilt. Eine Spitze erscheint ebenfalls, wenn $0 < \gamma_n^- < 1$ gilt, das Spektrum kann unendlich viele Spitzen enthalten.

Zwischen den beiden obigen Extremfällen liegt eine große Bandbreite an Flächen mit $\gamma_n^\pm > 1$ für einige n und $0 < \gamma_n^\pm < 1$ für andere. Sie produzieren Spektren, bei denen sowohl Lücken als auch Spitzen vorkommen. Dieses Phänomen tritt bei reellen Potentialen nicht auf.

Kommen wir nun zu Beispiel 3.7, dort ist $I(\mathcal{S})$ und somit auch σ eine zusammenhängende Menge. Der Teil von $I(\mathcal{S})$ auf den Blättern S_j mit $j = m + 1, \dots, m + k$ enthält $2k$ Intervalle mit gemeinsamen Endpunkten, die auf $\kappa = 0$ projiziert werden. Aufgrund

(3.8) besteht die Menge σ aus einer unbeschränkten, einfachen, strahlenartigen Kurve, asymptotisch zu $[0, \infty)$ und zusätzlich einem Kamm bestehend aus $2k - 2$ Spitzen. Eine einfache Modifikation von Beispiel 3.7 zeigt, dass die Anzahl der Käme, sowie die Anzahl der Spitzen aus denen er besteht, nicht beschränkt ist und dass jede Spitze auch zu anderen Kämen beitragen kann.

3.3. Von der Diskriminante zur Klasse IC

Um die erste Aussage von Theorem 3.3 zu zeigen, konstruieren wir eine Riemannsche Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$, die ein injektives konformes Bild von \mathbb{C} bezüglich $\Delta(\lambda)$ ist. Nach Theorem 3.2 erfüllt die Hill-Diskriminante die Gleichungen (3.5) und (3.6). Wir differenzieren nun (3.5) und erhalten

$$\delta'(\kappa) = -\sin \kappa + \frac{Q}{\kappa} \cos \kappa + \frac{F(\kappa)}{\kappa}. \quad (3.9)$$

$F(\kappa)$ ist eine ganze Funktion, die auf der reellen Achse quadratintegrierbar ist. Die kritischen Punkte κ_m von $\Delta(\kappa)$ bilden eine Folge $\kappa_m = m + \frac{Q}{m} + \frac{g_m}{m}$ mit $g_m \in l^2$. Setzen wir dies in (3.5) ein und definieren $\gamma_m := \Delta(\kappa_m)$, so ergibt sich

$$\gamma_m = (-1)^m + (-1)^m \frac{g_m^2}{2m^2} + \frac{f(\kappa_m)}{m^2} + O(m^{-4}). \quad (3.10)$$

Die kritischen Punkte sind also bis auf endlich viele alle einfach. Dass diese γ_m die Gleichung (3.7) erfüllen, folgt aus einer Betrachtung der subharmonischen Funktion $|f'(t)|^2$ und ihres Maximums auf Kreisen um γ_m . Wir wählen nun ein kleines ρ und außerdem $n = n(\rho)$ als gerade Zahl, so dass auf der Menge $\Omega^- = \{\kappa \mid |\operatorname{Re} \kappa| \geq n - 1/2\}$ die Abschätzung $|\Delta(\kappa) - \cos \kappa| < \rho e^{|\operatorname{Im} \kappa|}$ gilt. Jede kleine Kreisscheibe d_m um γ_m soll den Punkt $(-1)^m$ enthalten. Mit c_m bezeichnen wir eine einfache strahlenartige Kurve, die in γ_m beginnt und deren Punkte außerhalb von d_m entweder auf positiven oder negativen reellen Strahlen liegen. In Ω^- liegt $\Delta(\kappa)$ nahe bei $\cos \kappa$ und auf jedem c_m liegt nur ein kritischer Wert γ_m . Deshalb ist die Menge $l_m = \{\kappa \mid \Delta(\kappa) \in c_m, \Delta(\kappa_m) = \gamma_m\}$ eine einfache Kurve in \mathbb{C} , die aus zwei strahlenartigen analytischen Kurven mit demselben Endpunkt γ_m gebildet wird. Diese Kurve ist asymptotisch gleich $\{\kappa \mid \operatorname{Re} \kappa = m\}$. Das streifenartige Gebiet Π_{m+1} , das von zwei aufeinanderfolgenden Kurven l_m und l_{m+1} begrenzt wird, enthält keine kritischen Punkte von $\Delta(\kappa)$.

Für gerades $m > n$ nehmen wir nun zwei komplexe Ebenen S_m und S_{m+1} , diese schneiden wir entlang den Kurven $c_{m-1} \cup c_m$ bzw. $c_m \cup c_{m+1}$, für $m < -n$ sei $S_{-m} = S_m$. Durch

$\Delta(\kappa)$ wird der Streifen Π_m auf S_m abgebildet. Ist $a \in S_m$ ein beliebiger Punkt, so ist die Anzahl der a -Punkte von $\Delta(\kappa)$ in Π_m endlich und gleich der Windungszahl von $\Delta(\kappa) - a$ auf dem Rand eines Gebietes $\{\kappa \mid |\operatorname{Im} \kappa| < N, \kappa \in \Omega^-\}$ für großes N . Da Π_{m+1} asymptotisch zu $\{\kappa \mid m < \operatorname{Re} \kappa < m + 1\}$ ist und $\Delta(\kappa)$ nahe bei $\cos \kappa$ liegt, ist diese Windungszahl 1. Somit wird Π_m durch die Funktion $\Delta(\kappa)$ konform und isomorph auf S_m abgebildet und es existiert eine inverse Funktion $\phi_m(\kappa)$, die S_m konform und isomorph auf Π_m abbildet.

Um die Konstruktion der S_m zu vervollständigen betrachten wir $|m| \leq n$. Ω^+ sei das Gebiet, das durch l_n und l_{-n} beschränkt ist, dieses wird durch $\Delta(\kappa)$ auf die komplexe Ebene, die entlang c_n geschnitten ist, abgebildet. Ist $a \notin c_n$, dann ist die Anzahl der a -Punkte in Ω^+ gleich der Windungszahl von $\Delta(\kappa) - a$ auf dem Rand eines Gebietes $\{\kappa \mid |\operatorname{Im} \kappa| < N, \kappa \in \Omega^+\}$ mit N groß genug. Diese Windungszahl ist $2n$, da Ω^+ asymptotisch zu $\{\kappa \mid -n < \operatorname{Re} \kappa < n\}$ ist. Also ist $\Delta(\kappa)$ eine $2n$ -wertige Funktion in Ω^+ und ähnliche Argumente zeigen, dass es $2n - 2$ Punkte gibt mit $\Delta(\kappa) = \gamma_n$, wenn man die Vielfachheiten mit berücksichtigt.

Wir führen nun $2n$ Kopien der komplexen Ebene mit verschiedenen strahlenartigen Schnitten ein. Die Schnitte sollen für jede Kopie gleich sein und bei den kritischen Werten $\Delta(\kappa_m) = \gamma_m$, $\Delta'(\kappa_m) = 0$ starten. Wir nummerieren diese Kopien mit $\pm 1, \dots, \pm n$ und fügen zusätzliche Schnitte entlang c_n hinzu. Zusammen mit der obigen Beschreibung für $|m| > n$ ist dies die vollständige Beschreibung der Menge $\mathcal{S} = \{S_m\}_{m \neq 0}$.

Die Funktion $\Delta(\kappa)$ bildet eine Umgebung $V \subset \Omega^+$ von κ_n injektiv auf eine Umgebung $W \subset S_n$ von $\gamma_n = \Delta(\kappa_n)$ ab. Wir definieren in S_n die zu $\Delta(\kappa)$ inverse Funktion $\phi_n(w)$, so dass $\phi_n(w)$ und $\phi_{n+1}(w)$ die bei dem Verzweigungspunkt lokal analytische Funktion definieren, die bei dem Zusammenkleben der gegenüberliegenden Seiten von c_n in S_n und S_{n+1} entsteht. Außerdem sei $\phi_{-n}(w) = -\phi_n(-w)$.

Für $m = \pm 1, \dots, \pm(n - 1)$ definieren wir im Gebiet $W \subset S_m$ paarweise verschiedene analytische Funktionen $\phi_m(w)$, invers zu $\Delta(\kappa)$, die weder mit $\phi_n(w)$ noch mit $\phi_{-n}(w)$ zusammenfällt. Wir können $\phi_m(w) = -\phi_{-m}(w)$ annehmen, da $\Delta(\kappa)$ eine gerade Funktion ist. Jedes Gebiet S_m ist einfach zusammenhängend und wir können jede Funktion $\phi_m(w)$ als eindeutige analytische Funktion auf S_m fortsetzen.

Nach der obigen Konstruktion ist jedem Blatt S_m eine Funktion $\phi_m(w)$ zugeordnet, die S_m konform und isomorph auf ein ebenes Gebiet Π_m abbildet, das keine kritischen Punkte von $\Delta(\kappa)$ enthält. All diese Gebiete „pflastern“ die komplexe Ebene, die Grenzen dieser „Pflastersteine“ sind die Bilder von Schnitten. Fast alle Pflastersteine sind strei-

fenartige Gebiete, die Halbstreifen sind verknüpft an mehrfachen kritischen Punkten der Funktion $\Delta(\kappa)$. Wenn wir das gesamte Muster betrachten, so ist dieses symmetrisch in Bezug auf $\kappa = 0$. Es ändert sich mit jeder Deformation der Schnitte, aber die Anzahl der Knoten bleibt gleich der Anzahl der kritischen Punkte von $\Delta(\kappa)$. Somit ändert die Deformation die Struktur des Musters nicht grundlegend.

Der letzte Schritt der Konstruktion von \mathcal{S} ist alle Seiten von allen Schnitten zu passenden Paaren zusammenzufassen. Es ist nicht überraschend, dass das Aufteilen in Paare durch die Funktion $\Delta(\kappa)$ bestimmt wird. Wir starten mit der Verknüpfung von gegenüberliegenden Seiten von Schnitten für $2m \geq n$. Und zwar verknüpfen wir die Schnitte, die asymptotisch zu $[1, +\infty)$ auf S_{2m} und S_{2m+1} sind mit denen, die asymptotisch zu $(-\infty, -1]$ auf S_{2m+1} und S_{2m+2} sind. Für $2m \leq -n$ ersetzen wir das erste Paar durch S_{2m} und S_{2m-1} , das zweite Paar durch S_{2m-1} und S_{2m-2} .

Sei c ein Schnitt in S_m für $0 < |m| \leq n$, der für $m = \pm n$ nicht mit c_n zusammenfällt und $w \in c$ sei der Startpunkt. Für $\kappa \in \Omega^+$ mit $\Delta(\kappa) = w$ gilt dann $\Delta'(\kappa) \neq 0$ und $\phi_m(w)$ ist als eindeutige analytische Funktion entlang eines Bogens auf c invers zu $\Delta(\kappa)$ fortsetzbar. Somit existiert ein $p = p(m)$, so dass diese Fortsetzung lokal mit $\phi_p(w)$ zusammenfällt. Es gibt allerdings keinen anderen Wert $q = q(m)$ mit derselben Eigenschaft, da sonst ϕ_p und ϕ_q in einer Umgebung von w zusammenfallen würden, während sie in der Anfangsumgebung von γ_n disjunkt sind. Das Verknüpfen der Seiten von Schnitten ist somit beendet und das Zusammenkleben aller Paare liefert uns eine Riemannsche Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$ mit einer einwertigen Funktion Φ , die invers zu $\Delta(\kappa)$ ist. Die Eigenschaft *ii)* ist äquivalent zu $\Delta(-\kappa) = \Delta(\kappa)$.

Der Beweis der ersten Aussage von Theorem 3.3 ist somit komplett.

3.4. Von der Klasse IC zur Diskriminante

Nun sei eine Riemannsche Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$ gegeben und man möchte den zu dieser Fläche gehörenden Schrödingeroperator bzw. dessen Hill-Diskriminante bestimmen. Der Beweis erfordert sehr viel Aufwand und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, deswegen wird hier nur die Struktur des Beweises präsentiert.

Um eine Riemannsche Fläche $\mathcal{S} \in \mathbf{IC}$ zu erhalten, wählen wir zunächst ein n , schneiden den Teil der Riemannschen Fläche von $\arccos w$, der die Blätter S_{-n}, \dots, S_n enthält, weg und fügen stattdessen eine $2n$ -blättrige einfach zusammenhängende Riemannsche

Fläche ein, die in Bezug auf $ii)$ symmetrisch ist. Dann verschieben wir zusätzlich die Verzweigungspunkte auf S_m für $|m| > n$ leicht, bis die Bedingung (3.7) erfüllt ist. Diese Verschiebung wird durch eine ε -Deformation der Riemannschen Fläche von $\arccos w$ vollzogen. Die Riemannsche Fläche wird so deformiert, dass alle Verzweigungspunkte γ_m einfach bleiben und die Bedingung

$$|1 - \gamma_0| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n - \gamma_n| n^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad (3.11)$$

erfüllen.

Theorem 3.8. *Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jede ε -Deformation der \arccos -Fläche existiert eine uniforme Abbildung mit der dazugehörigen inversen Abbildung $\delta(\kappa)$ in der Form (3.5), wobei die Bedingungen*

$$|Q| \leq C\varepsilon \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)s|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq C\varepsilon \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |f(n)| \leq C\varepsilon \quad (3.12)$$

mit einer globalen Konstanten C erfüllt sind.

Nun wählen wir eine positive gerade Zahl n , so dass alle Verzweigungspunkte auf den Blättern S_m mit $|m| \geq n$ einfach sind und die Bedingung

$$\left(\sum_{|m| \geq n} |(-1)^m - \gamma_m| m^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad (3.13)$$

erfüllen. Die Fläche \mathcal{S} wird in drei einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen aufgeteilt, indem wir \mathcal{S} an den Schnitten c_n und c_{-n} , die an den Verzweigungspunkten w_n und w_{-n} starten, zerschneiden. Sei \mathcal{S}^0 die mittlere Fläche, also eine $2n$ -blättrige einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche mit den Grenzen c_n und c_{-n} . \mathcal{S}^0 hat inklusive Vielfachheiten genau $2n - 1$ Verzweigungspunkte. Wir erhalten die periodische Fortsetzung \mathcal{S}^{per} von \mathcal{S}^0 , indem wir jeder ganzen Zahl m eine Kopie S_m^0 zuordnen und an den gegenüberliegenden Schnitten $c_n \in S_m^0$ und $c_{-n} \in S_{m+1}^0$ verkleben. Diese periodische Fortsetzung lässt sich uniformisieren. Wenn wir anstelle von \mathcal{S}^0 den entsprechenden Teil der Riemannschen Fläche von $\arccos w$ einfügen, dann ist die entstehende Fläche $\hat{\mathcal{S}}$ wegen (3.13) eine ε -Deformation von \mathcal{S} . Die uniformen Abbildungen von $\hat{\mathcal{S}}$ und \mathcal{S}^{per} stellen

3. Parametrisierung der Hill-Diskriminante

eine stückweise Uniformisierung der ursprünglichen Fläche \mathcal{S} zur Verfügung, die aber teilweise unstetig ist. Diese Unstetigkeitsstellen sind genau die Schnitte c_n und c_{-n} , die \mathcal{S}^0 begrenzen. Die Unstetigkeit wird durch eine Verschiebung $\alpha(t)$ für $t \in c_n \cup c_{-n}$ kontrolliert. Durch die Betrachtung von asymptotischen Eigenschaften dieser Verschiebung und die Theorie von Randwertproblemen mit Verschiebung wird dann die Darstellung (3.5) bewiesen.

Die Menge aller Hill-Diskriminanten lässt sich somit durch eine Klasse von Riemannschen Flächen parametrisieren.

4. Ausblick

In der vorliegenden Arbeit ist das inverse Problem des eindimensionalen Schrödingeroperators bei komplexwertigen Potentialen betrachtet worden. Im ersten Kapitel haben wir die Spektraltheorie des Schrödingeroperators und der zugehörigen Eigenwertgleichung, der Hillgleichung untersucht. Wir haben ein Fundamentalsystem entwickelt und dessen analytischen Eigenschaften studiert. Der Begriff der Hill-Diskriminante Δ ist als ein wichtiges Hilfsmittel bei dieser Untersuchung eingeführt worden. Die Eigenwerte des Dirichletrandwertproblems, d.h. bei 0 und 1 verschwindet die gesuchte Funktion, haben wir als Dirichleteigenwerte bezeichnet, die Nullstellen der Funktionen $\Delta \pm 1$ als periodische bzw. antiperiodische Eigenwerte. Die asymptotische Lage der Dirichleteigenwerte ist bewiesen worden, der Beweis hierzu ist in dieser Form neu, das Ergebnis allerdings wohlbekannt. Das zweite Kapitel hat sich mit dem inversen Problem beschäftigt, bei gegebenen Eigenwerten haben wir das zugehörige Potential gesucht. Mit Hilfe der Hill-Diskriminante haben wir eine Riemannsche Fläche eingeführt, die an den periodischen und antiperiodischen Eigenwerten Verzweigungspunkte besitzt. Die Dirichleteigenwerte haben wir anschließend als Divisor auf dieser Riemannschen Fläche betrachtet. Wir haben gezeigt, dass die Bewegung der Dirichleteigenwerte ein System linearer Differentialgleichungen erfüllt. Durch die Definition der KdV-Hierarchie, einer Folge von Differentialoperatoren ungeraden Grades, haben wir eine einfache Spurformel zur Rekonstruktion des Potentials aus den Eigenwerten entwickelt. Das dritte Kapitel hat sich einer Parametrisierung der Menge aller Hill-Diskriminanten durch die Klasse \mathbf{IC} von Riemannschen Flächen gewidmet. Diese Klasse von Riemannschen Flächen hat sich dadurch ausgezeichnet, dass alle Verzweigungspunkte endliche Ordnung haben und die Projektionen der Verzweigungspunkte auf die komplexe Ebene alle in der Nähe von ± 1 liegen. Wir haben angedeutet, dass die Klasse \mathbf{IC} in 1-1-Beziehung zu einer Hill-Diskriminante steht, der ausführliche Beweis kann in [36] nachgelesen werden.

Es existiert bei dem inversen Problem allerdings auch noch eine andere interessante Fragestellung, wie bereits in der Einleitung erwähnt, die in dieser Arbeit jedoch nicht berücksichtigt werden konnte, da dies den Umfang gesprengt hätte. Man versucht das Isopektralproblem zu lösen, dabei sucht man nach der Menge von Potentialen, die die glei-

che Bandstruktur wie ein vorgegebenes Potential besitzen. Bei reellen Potentialen sind beide Probleme in [30] ausführlich beschrieben und gelöst, bei komplexen Potentialen sind die Isospektralmengen noch nicht vollständig bestimmt. Die Idee zur Bestimmung der Isospektralmenge ist ein gegebenes Potential mit Hilfe von Flüssen auf der Menge der Potentiale so zu verändern, so dass das periodische und antiperiodische Spektrum sich nicht verändern. Dabei definiert man die Flüsse durch die KdV-Hierarchie, im Falle reeller Potentiale ist dies ausführlich in [26] beschrieben, die gleichen Strategien werden auch in [1] benutzt. Man sieht, dass die Isospektralmengen lokal einen unendlichdimensionalen Raum beschreiben. Birnir gibt in [1] drei Darstellungen der Isospektralmengen an. Allerdings gelten diese nur für Potentiale mit endlich vielen Bandlücken und die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte darf höchstens 2 betragen. Diese drei Darstellungen sind : 1. Phasenraum der KdV-Flüsse, hier hat man ein Problem mit der lokalen Existenz für ein singuläres Potential; 2. Divisor auf der Riemannschen Fläche, das Problem hierbei ist die Kollision von Dirichleteigenwerten, dieses löst er selbst in [2]; 3. Jacobi-Varietät, die Rekonstruktion des Potentials erfolgt durch die Theta-Funktion. Im Augenblick ist noch keine Verallgemeinerung dieser Ideen auf allgemeine komplexwertige $L^2_{\mathbb{C}}$ -Potentiale mit unendlich vielen Bandlücken bekannt.

Die gleichen Probleme findet man auch bei dem mehrdimensionalen Schrödingeroperator $-\Delta + q$ (Δ ist nun der Laplace-Operator) mit einem Gitter G als Periode. Die Ideen lassen sich verallgemeinern, die Theorie wird allerdings abstrakter. Die Isospektralmengen dieser Operatoren bei C^1 -Potentialen wurden von Eskin, Ralston, Trubowitz in [6] und [7] untersucht. In [8] betrachten Feldman, Knörrer und Trubowitz dieses Problem für eine Dimension $d \leq 3$. Die Eigenwerte b^2 bei dem freien Potential sind die Summen der quadrierten Periodengitterlängen. Für ein $\frac{d-1}{\varepsilon}$ -mal differenzierbares reellwertiges Potential beweisen sie, dass genau zwei periodische Eigenwerte in einem Intervall der Länge $2|b|^{-2+\varepsilon}$ mit Mittelpunkt $b^2 + [q]$ liegen. Hierbei ist $[q]$ der Mittelwert des Potentials auf dem Torus und die Aussage gilt für ein festes $\varepsilon > 0$ und für alle b außer einer Menge mit Dichte 0. Die Eigenwerte in Dimensionen 2 und 3 verhalten sich also, abgesehen von einer Menge mit Dichte 0 und einem kleinen Verlust beim asymptotischen Abfall, genauso wie die Eigenwerte in einer Dimension.

A. Satz von Rouché

Wir werden nun drei Sätze über die Nullstellenverteilungen analytischer Funktionen beweisen. Der erste Satz liefert eine Aussage über die Nullstellenverteilung zweier Funktionen, die gewisse Abschätzungen auf dem Rand eines Kreises besitzen.

Satz A.1 (Rouché). *Seien f und g zwei analytische Funktionen auf und innerhalb eines Kreises $\gamma = \{z \mid |z - a| = R\}$. Falls*

$$|f(z)| < |g(z)|$$

auf γ gilt, dann haben f und $f+g$ innerhalb von γ gleich viele Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt.

Beweis. Wir betrachten das Integral

$$N(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)} dz$$

mit $0 \leq \lambda \leq 1$. Aufgrund der Voraussetzungen ist die Funktion $f + \lambda g$ nichtsingulär auf γ oder im Inneren von γ und hat keine Nullstellen auf γ . Somit ist wegen dem Argumentprinzip $N(\lambda)$ gleich der Anzahl der Nullstellen von $f + \lambda g$, die innerhalb von γ liegen. Dies bedeutet, dass $N(\lambda)$ eine ganze Zahl sein muss. Da γ kompakt ist, nehmen $|f|$ und $|g|$ Minima und Maxima auf γ an. Also existieren positive reelle Konstanten a und b mit

$$|f(z)| > a > b > |g(z)|$$

für alle z auf γ . Die Dreiecksungleichung impliziert nun $|f(z) + \lambda g(z)| > a - b$ auf γ . Somit ist $1/(f + \lambda g)$ eine stetige Funktion von λ falls $0 \leq \lambda \leq 1$ und $z \in \gamma$ gilt. Deswegen ist der Integrand eine stetige Funktion von γ und λ . Da γ kompakt ist, ist $N(\lambda)$ eine stetige Funktion in λ . Eine stetige Funktion einer reellen Variablen, die nur ganzzahlige Werte annimmt ist aber konstant. Im Speziellen bedeutet dies, dass die Anzahl der Nullstellen von $f + \lambda g$ innerhalb von γ die gleichen sind für alle λ . Nehmen wir nun die Extremfälle

$\lambda = 0$ und $\lambda = 1$, so bedeutet dies, dass f und $f + g$ die gleiche Anzahl an Nullstellen innerhalb von γ haben. \square

Mit Hilfe dieses Satzes kann man einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra angeben.

Theorem A.2. *Ein Polynom f vom Grad n besitzt inklusive Vielfachheiten genau n Nullstellen.*

Beweis. Das Polynom f habe die Darstellung $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, dann ist

$$\frac{f(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_1}{z} + \dots + a_n$$

und dies geht gegen 1 für z gegen unendlich. Es existiert also ein genügend großes R mit

$$\left| \frac{f(z)}{z^n} - 1 \right| < 1$$

für $|z| = R$, also gilt $|f(z) - z^n| < z^n$ für $|z| = R$. Somit folgt aus dem Theorem von Rouché, dass $f(z)$ genau n Nullstellen innerhalb von $|z| = R$ haben muss. \square

Theorem A.3 (Hurwitz). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und $\{f_i\}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf U , die auf kompakten Teilmengen von U gleichmäßig gegen f konvergiert. Der Abschluss des Kreises $B(z_0, r) = \{z \mid |z_0 - z| \leq r\}$ soll ganz in U liegen und f auf dem Rand des Kreises nicht verschwinden. Dann existiert eine ganze Zahl N , so dass für $n \geq N$ die Funktionen f_n und f die gleiche Anzahl an Nullstellen in $B(z_0, r)$ besitzen.*

Beweis. Mit der Definition

$$\varepsilon := \min\{|f(z)| \mid z \in \partial B(z_0, r)\}.$$

gilt für genügend großes n

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$$

für $|z - z_0| = r$. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Rouché, angewandt auf f_n und f . \square

B. Ganze Funktionen

B.1. Faktorisierungssatz von Hadamard

Wir suchen nach analytischen Funktionen, die ein vorgegebenes Nullstellenverhalten besitzen. Dazu geben wir uns eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vor, die uns die Nullstellen liefert. Diese Folge darf keinen Häufungspunkt besitzen, einzelne Folgenglieder können aber in endlicher Anzahl auftreten. Definieren wir naiv die Funktion $h(z) = \prod (z - a_n)$, so bekommen wir Probleme mit der Konvergenz des Produktes, deswegen müssen wir einen anderen Weg einschlagen. Die folgenden Definitionen und Sätze findet man größtenteils in [4], die Beweise kann man dort auch nachlesen.

Definition B.1. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **ganz**, wenn sie überall holomorph ist.

Vorab einige Lemmas, die Aussagen über die Konvergenz von unendlichen Produkten liefern. Dazu sei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.

Lemma B.2. Sind die Realteile der Zahlen z_n alle positiv, dann konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$ konvergiert.

Lemma B.3. Sind die Realteile der Zahlen z_n alle größer als -1 , dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ absolut genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergiert.

Definition B.4. Sind die Realteile der Zahlen z_n alle positiv, dann heißt das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergent genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$ absolut konvergiert.

Theorem B.5. Es sei G ein Gebiet in \mathbb{C} und $\{f_n\}$ eine Folge analytischer Funktionen, so dass kein f_n identisch verschwindet. Wenn $\sum (f_n(z) - 1)$ absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G konvergiert, dann konvergiert $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gegen eine analytische Funktion $f(z)$. Ist a eine Nullstelle der Funktion f , dann ist a eine Nullstelle nur

endlich vieler Funktionen f_m und die Vielfachheit von a ist die Summe der Vielfachheiten von den Nullstellen der Funktionen f_m in a .

Aufgrund dieses Theorems können wir die folgende Beobachtung machen. Wenn wir eine Funktion $g_n(z)$ finden können, die analytisch auf einem Gebiet ist, dort keine Nullstellen besitzt und $\sum |(z - a_n)g_n(z) - 1|$ auf kompakten Teilmengen des Gebietes gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert $\prod (z - a_n)g_n(z)$ gegen eine analytische Funktion, die exakt die Nullstellen a_n besitzt. Um auszudrücken, dass $g_n(z)$ nirgendwo verschwindet schreiben wir $g_n(z) = \exp(h_n(z))$, hierbei ist $h_n(z)$ eine analytische Funktion.

Definition B.6. Ein **elementarer Faktor** ist eine der Funktionen $E_p(z)$, definiert durch

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1 - z, \\ E_p(z) &= (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \end{aligned}$$

für $p = 0, 1, \dots$

Die Funktion $E_p(z/a)$ hat eine einfache Nullstelle an der Stelle a und keine weiteren. Mit Hilfe der elementaren Faktoren werden wir nun analytische Funktionen erzeugen, die vorgegebene Nullstellen besitzen. Zunächst eine weitere Ungleichung, die uns dann erlauben wird, Theorem B.5 anzuwenden und somit ein konvergentes unendliches Produkt zu erhalten.

Lemma B.7. Ist $|z| < 1$ und $p \geq 0$, dann gilt $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

Nun kommen wir zu einem Ergebnis für ganze Funktionen.

Theorem B.8. Es sei $\{a_n\}$ eine Folge in \mathbb{C} mit $\lim |a_n| = \infty$ und $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$. Ist nun $\{p_n\}$ eine Folge von ganzen Zahlen, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty$$

für alle $r > 0$ gilt (dies ist für $p_n = n - 1$ immer erfüllt), dann konvergiert

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

gegen eine ganze Funktion. Diese Funktion besitzt Nullstellen genau an den Punkten a_n . Tritt α in der Folge $\{a_n\}$ exakt m -mal auf, dann hat f eine Nullstelle der Ordnung m in α .

Die Folge $\{p_n\}$ kann unterschiedlich gewählt werden. Die Größe der ganzen Zahlen p_n wird bestimmt durch das Maß, wie stark die Folge $\{a_n\}$ gegen unendlich konvergiert, dies werden wir noch genauer untersuchen. Der nächste Satz wird uns zeigen, wie man analog zur Linearfaktorzerlegung bei endlich vielen Nullstellen, eine ganze Funktion mit unendlich vielen Nullstellen faktorisieren kann.

Satz B.9 (Faktorisierungssatz von Weierstraß). *Es sei f eine ganze Funktion und $\{a_n\}$ die Folge der Nullstellen von f mit Vielfachheiten gezählt, dabei sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$. An der Stelle 0 habe f eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 0$. Dann existiert eine ganze Funktion g und eine Folge von ganzen Zahlen $\{p_n\}$, so dass $f(z)$ geschrieben werden kann als*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right).$$

Nun folgt eine Klassifizierung von ganzen Funktionen.

Definition B.10. *Es sei f eine ganze Funktion mit den Nullstellen $\{a_n\}$, die mit Vielfachheiten wiederholt werden. Außerdem seien die Nullstellen betragsmäßig angeordnet $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Dann ist f von **endlichem Rang**, wenn eine ganze Zahl p existiert mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1} < \infty.$$

*Ist \hat{p} die kleinste ganze Zahl die dies erfüllt, dann ist f vom **Rang** \hat{p} . Eine Funktion mit nur endlich vielen Nullstellen hat Rang 0 .*

Wenn f endlichen Rang hat, dann kann f geschrieben werden als

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$$

mit

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n). \tag{B.1}$$

Das Produkt heißt **Standardform** von f .

Definition B.11. Eine ganze Funktion f hat **endliches Geschlecht**, wenn f endlichen Rang hat und darstellbar ist als

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z),$$

wobei P in Standardform und g ein Polynom ist. Ist p der Rang von f und q der Grad des Polynoms g , dann heißt $\rho = \max(p, q)$ **Geschlecht** von f .

Das Geschlecht von f ist eine wohldefinierte ganze Zahl. Sobald P in Standardform ist, dann ist g eindeutig bestimmt bis auf die Addition von Vielfachen von $2\pi i$. Insbesondere ist der Grad von g festgelegt.

Theorem B.12. Ist f eine ganze Funktion vom Geschlecht μ , dann existiert für jede positive Zahl α eine Zahl r_0 , so dass für $|z| > r_0$

$$|f(z)| < \exp(\alpha|z|^{\mu+1})$$

gilt.

Definition B.13. Eine ganze Funktion f hat **endliche Ordnung**, wenn eine positive Konstante α und ein $r_0 > 0$ existieren, so dass

$$|f(z)| < \exp(|z|^\alpha)$$

für $|z| > r_0$ gilt. Wenn f endliche Ordnung hat, dann heißt die Zahl

$$\lambda = \inf\{a \mid |f(z)| < \exp(|z|^a) \text{ für } z \text{ groß genug}\}$$

Ordnung von f .

Proposition B.14. Ist f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung λ und $\varepsilon > 0$, dann gilt $|f(z)| < \exp(|z|^{\lambda+\varepsilon})$ für alle genügend großen $|z|$. Es kann außerdem ein z gefunden werden, so dass $|f(z)| < \exp(|z|^{\lambda-\varepsilon})$ gilt.

Mit diesen Begriffen können wir Theorem B.12 umschreiben in das folgende Korollar.

Korollar B.15. Ist f eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht μ , dann hat f endliche Ordnung $\lambda \leq \mu + 1$.

Dass auch die Umkehrung dieses Korollars gilt, wird der Faktorisierungssatz von Hadamard zeigen. Da eine Funktion endlichen Geschlechts aufgrund des Faktorisierungssatzes von Weierstraß gut faktorisiert werden kann ist dies wirklich ein Faktorisierungssatz. Zunächst ein vorbereitendes Lemma.

Lemma B.16. *Es sei f eine nichtkonstante ganze Funktion der Ordnung λ mit $f(0) = 1$ und seien $\{a_n\}$ die Nullstellen von f mit Vielfachheiten gezählt und betragsmäßig so angeordnet, dass $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ gilt. Ist $p > \lambda - 1$ eine ganze Zahl, dann gilt*

$$\frac{d^p}{dz^p} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = -p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}}$$

für $z \neq a_1, a_2, \dots$.

Theorem B.17 (Faktorisierungssatz von Hadamard). *Ist f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung λ , dann hat f auch endliches Geschlecht $\mu \leq \lambda$.*

Nun erhalten wir hieraus auch die Tatsache, dass eine ganze Funktion der Ordnung $1/2$ unendlich viele Nullstellen hat, der folgende Satz zeigt dies noch allgemeiner.

Satz B.18. *Sei f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung λ , wobei λ keine ganze Zahl ist. Dann hat f unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f nur endlich viele Nullstellen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ besitzt, diese seien mit Vielfachheiten gezählt. Dann gilt $f(z) = e^{g(z)}(z - a_1) \dots (z - a_n)$ für eine ganze Funktion g . Wegen dem Faktorisierungssatz ist g ein Polynom vom Grad $\leq \lambda$. Aber f und $e^{g(z)}$ müssen die gleiche Ordnung haben. Da die Ordnung von $e^{g(z)}$ der Grad von g ist, muss λ eine ganze Zahl sein. Somit ist die Behauptung bewiesen. \square

B.2. Unendliche Produkte

In diesem Abschnitt geben wir drei Lemmas über unendliche Produkte an. Wir veranschaulichen nur den Beweis für das erste Lemma, die übrigen Beweise findet man in [30, Anhang E]. Außerdem entwickeln wir eine Produktdarstellung für die Funktion $\sin \sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda}$.

Lemma B.19.

(a) *Es seien $a_{nm}, m, n \geq 1$ komplexe Zahlen, die*

$$|a_{mn}| = O\left(\frac{1}{|m^2 - n^2|}\right), \quad m \neq n$$

erfüllen. Dann gilt

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} (1 + a_{mn}) = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

(b) Ist zusätzlich $\{b_n\}$ eine quadratsummierbare Folge komplexer Zahlen, dann gilt

$$\prod_{\substack{m, n \geq 1 \\ m \neq n}} (1 + a_{mn} b_n) < \infty.$$

Beweis.

(a) Aufgrund der Annahme gilt

$$\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} |a_{mn}| \leq C \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{|m^2 - n^2|}$$

mit einer Konstanten C . Die Summe auf der rechten Seite kann man abschätzen durch

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{|m^2 - n^2|} &= \sum_{\substack{1 \leq m \leq 2n \\ m \neq n}} \frac{1}{|m - n|} \frac{1}{m + n} + \sum_{m > 2n} \frac{1}{m^2 - n^2} \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} + \sum_{k > n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{n} (1 + \log n) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit einer anderen Konstanten C' die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} (1 + a_{mn}) - 1 \right| &\leq \prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} (1 + |a_{mn}|) - 1 \\ &\leq \exp\left(\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} |a_{mn}|\right) - 1 \\ &\leq \exp\left(C' \frac{1 + \log n}{n}\right) - 1 = O\left(\frac{\log n}{n}\right). \end{aligned}$$

(b) Aus (a) erhalten wir

$$\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} |a_{mn}| \leq \frac{C}{n} (1 + \log n).$$

Wenden wir nun die Schwarzsche Ungleichung an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m,n \geq 1 \\ m \neq n}} |a_{mn}| |b_n| &= \sum_{n \geq 1} b_n \left(\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} |a_{mn}| \right) \\ &\leq C \sum_{n \geq 1} \frac{1 + \log n}{n} |b_n| \\ &\leq C \left(\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 + \log n}{n} \right)^2 \sum_{n \geq 1} |b_n|^2 \right)^{1/2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

Nun untersuchen wir die Produktentwicklung von $\sin \sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda}$ an der Stelle $\sqrt{\lambda} = \pi z$, dazu betrachten wir zunächst die Funktion $\sin \pi z$. Die Nullstellen dieser Funktion sind die Punkte $z = \pm n$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konvergiert, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ divergiert, ist der Rang der Funktion 1, wir können $p = 1$ wählen. Es gilt also

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n} \right) \exp \left(\frac{z}{n} \right).$$

Um $g(z)$ zu bestimmen, berechnen wir die logarithmische Ableitung $\frac{f'}{f}$ dieser Funktion.

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

Dies gilt aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen, die $z = n$ nicht enthalten. Nun benutzen wir die Taylorreihendarstellung von $\cot \pi z$, somit gilt $g'(z) = 0$ und $g(z)$ ist konstant. Wegen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

folgt $e^{g(z)} = \pi$. Also gilt

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n} \right) \exp \left(\frac{z}{n} \right)$$

und wenn wir die Terme für n und $-n$ zusammenfassen erhalten wir

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Setzen wir nun wieder $\sqrt{\lambda} = \pi z$ ein, so ergibt sich

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{\lambda}{\pi^2 n^2}\right). \quad (\text{B.2})$$

Wenn man im Zähler die Zahlen $n^2\pi^2$ durch komplexe Zahlen z_n mit dem gleichen asymptotischen Verhalten ersetzt, dann erhalten wir eine ganze Funktion, die $\sin \sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda}$ auf gewissen Kreisen approximiert. Dies ist die Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma B.20. *Ist $z_m, m \geq 1$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass*

$$z_m = m^2\pi^2 + O(1)$$

gilt, dann ist das unendliche Produkt

$$\prod_{m \geq 1} \frac{z_m - \lambda}{m^2\pi^2}$$

eine ganze Funktion von λ mit genau den Nullstellen $z_m, m \geq 1$. Zusätzlich gilt

$$\prod_{m \geq 1} \frac{z_m - \lambda}{m^2\pi^2} = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)$$

gleichmäßig auf den Kreisen $|\lambda| = (n + \frac{1}{2})^2\pi^2$.

Nun noch eine Variante des vorherigen Lemmas.

Lemma B.21. *Sei $z_m, m \geq 1$ eine Folge von komplexen Zahlen mit $z_m = m^2\pi^2 + O(1)$. Dann ist für jedes $n \geq 1$*

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{z_m - \lambda}{m^2\pi^2}$$

eine ganze Funktion in λ , so dass

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{z_m - \lambda}{m^2\pi^2} = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)$$

gleichmäßig für $\lambda = n^2\pi^2 + O(1)$ gilt.

Literaturverzeichnis

- [1] BIRNIR, B. Complex Hill's equation and the complex periodic Korteweg-de Vries equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 39, 1 (1986), 1–49.
- [2] BIRNIR, B. Singularities of the complex Korteweg-de Vries flows. *Comm. Pure Appl. Math.* 39, 3 (1986), 283–305.
- [3] BORG, G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte. *Acta Math.* 78 (1946), 1–96.
- [4] CONWAY, J. *Functions of one complex variable*. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [5] DUBROVIN, B. A., AND NOVIKOV, S. P. A periodic problem for the Korteweg-de Vries and Sturm-Liouville equations. Their connection with algebraic geometry. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 219 (1974), 531–534.
- [6] ESKIN, G., RALSTON, J., AND TRUBOWITZ, E. On isospectral periodic potentials in \mathbf{R}^n . *Comm. Pure Appl. Math.* 37, 5 (1984), 647–676.
- [7] ESKIN, G., RALSTON, J., AND TRUBOWITZ, E. On isospectral periodic potentials in \mathbf{R}^n II. *Comm. Pure Appl. Math.* 37, 6 (1984), 715–753.
- [8] FELDMAN, J., KNÖRRER, H., AND TRUBOWITZ, E. The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator. *Invent. Math.* 100, 2 (1990), 259–300.
- [9] GESZTESY, F. Integrable systems in the infinite genus limit. *Differential Integral Equations* 14, 6 (2001), 671–700.
- [10] GESZTESY, F., AND HOLDEN, H. *Soliton equations and their algebro-geometric solutions*. Vol. I, vol. 79 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [11] GESZTESY, F., AND WEIKARD, R. Picard potentials and Hill's equation on a torus. *Acta Math.* 176, 1 (1996), 73–107.
- [12] GRÉBERT, B., KAPPELER, T., AND PÖSCHEL, J. A note on gaps of Hill's equation. *Int. Math. Res. Not.* 50 (2004), 2703–2717.
- [13] HOCHSTADT, H. Functiontheoretic properties of the discriminant of Hill's equation. *Math. Z.* 82 (1963), 237–242.

- [14] HOCHSTADT, H. On the determination of a Hill's equation from its spectrum. *Arch. Rational Mech. Anal.* 19 (1965), 353–362.
- [15] ISAACSON, E. L., MCKEAN, H. P., AND TRUBOWITZ, E. The inverse Sturm-Liouville problem II. *Comm. Pure Appl. Math.* 37, 1 (1984), 1–11.
- [16] ISAACSON, E. L., AND TRUBOWITZ, E. The inverse Sturm-Liouville problem I. *Comm. Pure Appl. Math.* 36, 6 (1983), 767–783.
- [17] ITS, A. R., AND MATVEEV, V. B. Hill operators with a finite number of lacunae. *Funkcional. Anal. i Priložen.* 9, 1 (1975), 69–70.
- [18] KAPPELER, T., AND MITYAGIN, B. Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schrödinger operator. *SIAM J. Math. Anal.* 33, 1 (2001), 113–152.
- [19] LAX, P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.* 21 (1968), 467–490.
- [20] LAX, P. D. Periodic solutions of the KdV equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975), 141–188.
- [21] LEVITAN, B. M., AND SARGSJAN, I. S. *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.
- [22] LIOUVILLE, J. Mémoire sur le développement des fonctions ou parités de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire a une même équation différentielles du second ordre contenant un paramètre variable. *J. de Math.* 1 (1836), 253–265.
- [23] MAGNUS, W., AND WINKLER, S. *Hill's equation*. Interscience Publishers John Wiley & Sons New York-London-Sydney, 1966.
- [24] MARLETTA, M., AND WEIKARD, R. Weak stability for an inverse Sturm-Liouville problem with finite spectral data and complex potential. *Inverse Problems* 21, 4 (2005), 1275–1290.
- [25] MCKEAN, H. P. Integrable systems and algebraic curves. In *Global analysis (Proc. Biennial Sem. Canad. Math. Congr., Univ. Calgary, Calgary, Alta., 1978)*, vol. 755 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 1979, pp. 83–200.
- [26] MCKEAN, H. P., AND TRUBOWITZ, E. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. *Comm. Pure Appl. Math.* 29, 2 (1976), 143–226.
- [27] MCKEAN, H. P., AND VAN MOERBEKE, P. The spectrum of Hill's equation. *Invent. Math.* 30, 3 (1975), 217–274.
- [28] MCLAUGHLIN, J. Stability theorems for two inverse spectral problems. *Inverse Problems* 4, 2 (1988), 529–540.
- [29] NOVIKOV, S. P. A periodic problem for the Korteweg-de Vries equation. I. *Funkcional. Anal. i Priložen.* 8, 3 (1974), 54–66.
- [30] PÖSCHEL, J., AND TRUBOWITZ, E. *Inverse spectral theory*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.
- [31] ROFE-BEKETOV, F. S. On the spectrum of non-selfadjoint differential operators with periodic coefficients. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 152 (1963), 1312–1315.

- [32] RYABUSHKO, T. I. Estimation of the norm of the difference of two potentials of Sturm-Liouville boundary value problems. *Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 39 (1983), 114–117.
- [33] SEROV, M. I. Certain properties of the spectrum of a non-selfadjoint differential operator of the second order. *Soviet Math. Dokl.* 1 (1960), 190–192.
- [34] STURM, C. Sur les équations différentielle linéaires du second ordre. *J. de Math.* 1 (1836), 106–186.
- [35] TITCHMARSH, E. C. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Vol. 2.* Oxford, at the Clarendon Press, 1958.
- [36] TKACHENKO, V. Spectra of non-selfadjoint Hill's operators and a class of Riemann surfaces. *Ann. of Math.* 143, 2 (1996), 181–231.
- [37] TKACHENKO, V. A. On the spectral analysis of the one-dimensional Schrödinger operator with a periodic complex-valued potential. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 155 (1964), 289–291.
- [38] TKACHENKO, V. A. Discriminants and generic spectra of nonselfadjoint Hill's operators. In *Spectral operator theory and related topics.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 41–71.
- [39] TREIBICH, A., AND VERDIER, J.-L. Revêtements tangentiels et sommes de 4 nombres triangulaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 311, 1 (1990), 51–54.
- [40] TREIBICH, A., AND VERDIER, J.-L. Solitons elliptiques. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, vol. 88 of *Progr. Math.* Birkhäuser, Boston, MA, 1990, pp. 437–480.
- [41] TREIBICH, A., AND VERDIER, J.-L. Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires. *Duke Math. J.* 68, 2 (1992), 217–236.

Erklärung :

Ich versichere hiermit, dass ich die vorgelegte Diplomarbeit selbständig durchgeführt und keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe.

Mannheim, 24.Mai 2006

Jörg Zentgraf