Analysis II - Wiederholungsblatt FSS 2020

① (1) $d_1(x,y) = |x-y|$ ist eine Metrik, denn

(i) $d_1(x,y) = 0 \iff x = y$, da $|z| = 0 \iff z = 0$

(ii) Da $|x-y| \overset{|\cdot|}{=} |(-1)y - x| \overset{|\cdot|}{=} |(-1)| \cdot |y-x| = |y-x|$

$\Rightarrow d_1(x,y) = d_1(y,x)$

(iii) $d_1(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \overset{\Delta}{\leq} |x-z| + |z-y| \rightarrow d_1(x,z) + d_1(z,y)$

(2) ~~$d_2(x$~~ $d_2(x,y) = |x-2y|$ ist keine Metrik, denn

Sei $x=1$ $y=1 \Rightarrow x \neq y$ aber $d_2(2,1) = |2-2| = 0$

Somit keine Metrik $\not\Leftarrow$ "Axiom (i) verletzt"

(3) $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$

Sei $x = 1$ $y = -1 \Rightarrow x \neq y$ aber $d_3(1,-1) = 0$

Somit ist (i) $\not\Leftarrow$ "verletzt" und daher d_3 keine Metrik.

② **Beh:** $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ ist eine Metrik

Bew: (i) Da $\sqrt{x} = 0 \iff x = 0$ und $|x-y| = 0 \iff x = y$ gilt

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) Da $|x-y| = |y-x|$ ist gilt (ii)

(iii) Wir müssen $\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}$ (*) zeigen $\sqrt{|x-z+z-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$ ($\sqrt{\cdot}$-Monotonie; a, b)

Wir zeigen, $a \geq 0$, $b \geq c$, $c \geq 0$, damit gilt damit:

$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ und somit gilt (*)

$0 \leq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \overset{a+b \geq 0}{\iff} a + b \leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

$\overset{\text{Monot.}}{\underset{\sqrt{\cdot}}{\iff}} \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

□

③ VSS: $X = \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \text{ ist eine Metrik}$$

Bew: Methode 1) wie in der ÜBUNG 2

Methode 2) (i) Da $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$

(ii) Da $|x-y| = |y-x|$ klar

(iii) Z.Z: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Bem: Idee: wie (2)

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \overset{\text{Zeigen wir das}}{\not=} \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} = \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$

$$\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$$\overset{\text{Def}}{=} d(x,z) + d(z,y)$$

Reicht uns völlig

Für $d(x,y) \neq 0$, wir haben (*)

$$\frac{1}{d(x,y)} = \frac{1+|x-y|}{|x-y|} = 1 + \frac{1}{|x-y|} \geq 1 + \frac{1}{|x-z|+|z-y|} = \frac{1+|x-z|+|z-y|}{|x-z|+|z-y|}$$

$$\overset{\text{Kehrt.}}{\iff} \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \geq d(x,y)$$

Terme ≥ 0

(4) VSS: Sei (F,d) ein beliebiger nichtleerer metrischer Raum und sei $P \in F$.

Z.Z: $d_P(x,y) := \begin{cases} 0 & x=y \\ d(x,P)+d(P,y) & x \neq y \end{cases}$

ist eine neue Metrik auf F

Bew: (i) Nach Def. ist $d_P(x,y) \geq 0$

Falls $x=y \Rightarrow d_P(x,y)=0$

Sei $d_P(x,y)=0$. Angenommen $x \neq y$

dann ist $d_P(x,y) = d(x,P)+d(P,y)$, da $x \neq y \Rightarrow x \neq P$ oder $y \neq P$

Also ist $d(x,P) \overset{>0}{\neq} 0$ oder $d(y,P) > 0$, da d eine Metrik ist. $\lightning$ zu $(d_P(x,y)=0)$

(ii) Sei $x=y \Rightarrow d_P(x,y) = d_P(y,x)$

Sei $x \neq y \Rightarrow d_P(x,y) = d(x,P)+d(P,y)$

$= d(P,y)+d(x,P)$

$\overset{\text{Symmetrie von } d}{=} d(y,P)+d(P,x) = d_P(y,x)$

(iii) Es gilt:

$d_P(x,y) = d_P(x,P)+d(P,y)$

$\overset{d\text{-Dreieck}}{\leq} d(x,P)+d(P,z)+d(z,P)+d(P,y) = d_P(x,z)+d_P(z,y)$

≥ 0

□

(5) VSS: (X,d) ein metrischer Raum und $x,y,u,v \in X$.

a) Z.Z: $|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(v,y)$

Bew. Fall 1: $d(x,y) \geq d(u,v)$

Idee: Wie 2x Δ Ungl.

$$d(x,y) \overset{\Delta}{\leq} d(x,u) + d(u,y) \overset{d \geq 0}{\leq} d(x,u) + d(u,v) + d(v,y)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq d(x,y) - d(u,v) \leq d(x,u) + d(v,y)$$

$$\Rightarrow |d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(v,y) \text{ in Fall 1.}$$

Fall 2: $d(x,y) < d(u,v)$

~~$d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v)$~~.

Ziel: $d(u,v) \leq d(x,u) + d(v,y) + d(x,y)$

~~$d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v) \leq d(x,u) + d(x,v) + d(x,y)$~~

$$d(u,v) \overset{(3)}{\leq} d(u,y) + d(y,v) \overset{(3)}{\leq} d(u,x) + d(x,y) + d(v,y)$$

$$\Rightarrow |d(u,v) - d(x,y)| \leq d(x,u) + d(v,y)$$

Da Fall 1 / Fall 2 jeden Fall abdeckt sind wir fertig.

b) Z.Z: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy Folgen in X.

$\Rightarrow (d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge in $\mathbb{R}$.

Bew. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ C.F. in X sind gilt nach Def: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$

s.d. I $\forall n \geq N_1$: $d(x_n, x) < \varepsilon/2$

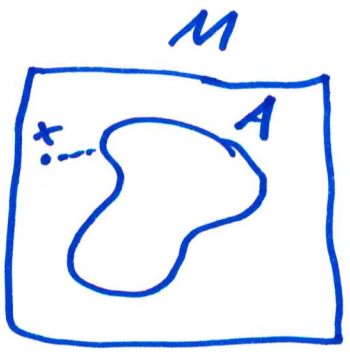
II $\forall n \geq N_2$: $d(y_n, y) < \varepsilon/2$

Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$.

$$0 \leq |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \overset{a)}{\leq} d(x_n, x) + d(y_n, y) = d(x_n, x) + d(y_n, y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Def. ist $(d(x_n, d(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ein C.F.

(6) VSS. X metrischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere kompakte Teilmenge.



$dist(\cdot, A): X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto dist(x,A) := \inf\{d(x,z) \mid z \in A\}$

Behaj: $\forall x \in X \; \exists b \in A : dist(x,A) = d(x,b)$

Bew: Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung

$a \mapsto d(x,a)$ eine stetige Funktion von $A \to \mathbb{R}$

Da A kompakt ist, nimmt die Abbildung ihr Minimum auf der Menge A an und dieses entspricht dem Inf.

Behb): $|dist(x,A) - dist(y,A)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y \in X$

Bew: Sei $x,y \in X$.

Da A kompakt ist existiert ein $b \in A$, sodass

$d(y,b) = d(y,A)$ (*)

$$d(x,b) \leq d(x,y) + d(y,b) \overset{(*)}{=} d(x,y) + dist(y,A) \quad \text{I}$$

Wegen $b \in A$ ist $d(x,b) \geq \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} = dist(x,A)$

und somit

$$dist(x,A) \overset{\text{I}}{\leq} d(x,b) \leq d(x,y) + dist(y,A) \quad \text{II}$$

Ziel

$$\Rightarrow dist(x,A) - dist(y,A) \leq d(x,y)$$

Vertausche x und y und erhalte

$$dist(y,A) - dist(x,A) \leq d(x,y)$$

$$\Rightarrow |dist(x,A) - dist(y,A)| \leq d(x,y)$$

(7) VSS. $X = \mathbb{R}^n$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

Behs: $\|x\|_2$ ist eine Norm

Bew: $\|x\| \geq 0$ klar, da $x_i^2 \geq 0$ und $\sqrt{z} \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$

"$\|x\|=0 \Rightarrow x=0$"

$\Leftrightarrow$ "$x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0$"

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$

$\Rightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\}: x_i \neq 0$

$\Rightarrow 0 < |x_i| \leq (x_i^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

$\overset{\|\cdot\|_2}{\Rightarrow} \|x\|_2 \neq 0$

"Sei $x=0$ $\overset{*}{\Rightarrow} \|x\|=0$"

Sei $x=0$

$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}: x_i = 0$

$\Rightarrow x_i^2 = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$

$\overset{\sqrt{0}=0}{\Rightarrow} \|x\|_2 = 0$

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$: $\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2\right)^{1/2} = \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ ($< \infty$)

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n: \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|_2$

(iii) Da für $0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ gilt, zeigen wir: (*)

$\|x+y\|_2^2 = \phi(x+y, x+y) \overset{\text{Lin}}{=} \phi(x, x+y) + \phi(x+y, y)$

$\overset{\text{Sym, Lin}}{=} \phi(x+y, x) + \phi(y+x, y)$

$\overset{\text{Lin}}{=} \phi(x,x) + \phi(x,y) + \phi(x,y) + \phi(y,y)$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\phi(x,y)$

$\overset{\text{C.S.}}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(8) (1) $\|x\|_1 = x_1^2 + x_2^2$

Beh: $\|\cdot\|_1$ ist keine Norm

Bew: Sei $\lambda = 2$ $x = (2,0)$

$\Rightarrow \|\lambda x\|_1 = \|2\cdot(2,0)\|_1 = \|(4,0)\|_1 = 4^2 = 16 \neq 2\cdot\|(2,0)\|_1 = 8$

(2) $\|x\|_2 = |x_1| + |x_2|$

Beh: $\|\cdot\|_2$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^2$

Bew: Da $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$\Rightarrow |x_1| + |x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$ und somit $x = 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ bel. $\|\lambda x\|_2 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda|\,(|x_1| + |x_2|) = |\lambda|\,\|x\|_2$ ...

bel. (3) Sei $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

Dreiecksungl.: $\|x+y\|_2 = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$

$= \|x\| + \|y\|$

(3) $\|x\|_3 = \max\{x_1, x_2\}$

Beh: $\|\cdot\|_3$ ist keine Norm

Bew: Sei $x = (-1,0)$

$\Rightarrow \|x\| = \max\{-1, 0\} = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ aber $x \neq 0$

(4) $\|x\|_4 = \max\{2|x_1|, 3|x_2|\}$

" $\|x\|_4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ "

Da $\max\{2|x_1|, 3|x_2|\} = \begin{cases} 2|x_1| & 2|x_1| \geq 3|x_2| \\ 3|x_2| & 3|x_2| \geq 2|x_1| \end{cases}$

$\Rightarrow \|x\|_4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ bel.

$\|\lambda x\|_4 = \max\{2|\lambda x_1|, 3|\lambda x_2|\} = \max\{2\,|\lambda|\,|x_1|, 3\cdot|\lambda|\,|x_2|\}$

$= \begin{cases} 2|\lambda|\,|x_1| \dots \\ 3|\lambda|\,|x_2| \dots \end{cases} = |\lambda| \begin{cases} 2|x_1| \dots \\ 3|x_2| \dots \end{cases}$ $= |\lambda|\,\|x\|_4$ (für $|\lambda| \neq 0$)

(iii) Wir wissen zeigen das

$\max\{2|x_1+y_1|, 3|x_2+y_2|\} \leq \max\{2|x_1|, 3|x_2|\} + \max\{2|y_1|, 3|y_2|\}$

$\max\{2|x_1+y_1|, 3|x_2+y_2|\} \leq \max\{2(|x_1|+|y_1|), 3(|x_2|+|y_2|)\}$

$\overset{(*)}{\leq} \max\{2|x_1|, 3|x_2|\}$

$+\max\{2|y_1|, 3|y_2|\} = \|x\|_4 + \|y\|_4$

(*) Sei $a,b,c,d \geq 0$ bel. in $\mathbb{R}$

$a+b \leq \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$

$c+d \leq \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$

$\Rightarrow \max\{a+b, c+d\} \leq \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$

mit $a = 2|x_1|$ $c = 3|x_2|$

$b = 2|y_1|$ $d = 3|y_2|$ folgt dann (*)

(5) $\|x\|_5 = \left|\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right|$ ist keine Norm, denn

$x = (-1,1,0) \neq 0$ aber $\|x\|_5 = \left|\frac{-1+1+0}{3}\right| = 0$

(9) (i) Beh: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen

Bew: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist offen, denn

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \ldots$

$= (-\infty, 1) \cup \left(\bigcup_{n \text{ neu}} (n, n+1)\right)$

offen offen

Da die Abzählbare Vereinigung von offenen Mengen offen ist, ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ offen.

$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist abgeschlossen

(ii) Beh: $\mathbb{Q}$ ist weder offen noch abgeschlossen

(1) $\mathbb{Q}$ ist nicht abgeschlossen

Nach Lemma 9.19 reicht es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, sodass

$a_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ aber $a = \lim_{n \to \infty} a_n = a \notin \mathbb{Q}$

Sei $a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n + a_n}$ mit $a_0 = 1 \overset{\text{AN II}}{\Rightarrow} \lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ jedoch ist $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

⑨ VSS: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

Beh: $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen

Bew: $\mathbb{N}^C = (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \ldots$

$= (-\infty, 1) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1) \right)$

offen, offen

Da abzählbare Vereinigung offener Mengen offen ist.

$\Rightarrow \mathbb{N}^C$ ist offen $\Rightarrow \mathbb{N}$ ist abgeschlossen

Beh2: $\mathbb{Q}$ ist nicht offen/nicht abgeschlossen

Bew: "Nicht offen": Aus ANA I: $\forall q \in \mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0 : (q-\varepsilon, q+\varepsilon) \not\subseteq \mathbb{Q}$

Somit kann $\mathbb{Q}$ nicht offen sein.

"Nicht abgeschlossen": Sei $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{x_n}$

Aus ANA I wissen wir, dass $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Nach VL kann $\mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen sein.

Beh3: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist nicht offen oder abgeschlossen

Bew: "Nicht abgeschlossen"

Annahme: Sei $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abgeschlossen. Nach Def. ist $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^C = \mathbb{R} \cap ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))^C$

$= \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^C)^C$

$= \mathbb{R} \cap (\emptyset \cup \mathbb{Q})$

$= \mathbb{Q}$ offen

Nach Beh2 ist aber $\mathbb{Q}$ nicht offen ↯ Somit ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen

"Nicht offen":

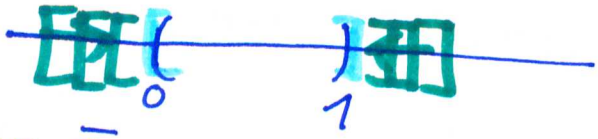
Annahme: Sei $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ offen. Somit gilt: $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \; \exists \varepsilon > 0 : B(r, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Aus ANA I gilt jedoch: Für $x < y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $p \in \mathbb{Q}$ s.d. $x < p < y$

Somit gilt $\forall \varepsilon > 0 : B(r, \varepsilon) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ↯

Beh 4: $\overline{(0,1)} = [0,1]$

Bew: Aus Def. $\overline{(0,1)} = \bigcap_{\substack{G \text{ abgesch.} \\ (0,1) \subseteq G}} G = [0,1]$, denn $\forall G$ abgeschlossen mit $(0,1) \subseteq G$ gilt: $[0,1] \subseteq G$.



Beh 5: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Bew: Wir zeigen, dass $\forall A$ abgeschlossen mit $A \subsetneq \mathbb{R} \Rightarrow A \neq \overline{\mathbb{Q}}$

Sei $A \subsetneq \mathbb{R}$ abgeschlossen, da $A \subsetneq \mathbb{R}$ gilt für A^c, dass es ein offenes Intervall $I \subseteq A^c$ gibt. Dann gibt es aber auch $q \in I \subseteq A^c$ und somit ist $\mathbb{Q} \not\subseteq A$. Dann kann $A \neq \overline{\mathbb{Q}}$ sein. Da $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist und $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$\forall B \in \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ A \supseteq \mathbb{Q}}} A \Rightarrow \mathbb{R} \subseteq B \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Beh 6: $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Bew: Selbes Verfahren wie Beh 5)

Beh 7: Sei $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beh: $\overline{K} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Bew: $\overline{K}$ enthält alle Grenzwerte der Folgen aus K.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bel. Folge aus K, welche konvergiert.

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält T.F. $\left(\frac{1}{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = 0$.

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

(Umkehr.)

$\Rightarrow$ Der Grenzwert aller konvergenten Folgen ist 0

$\Rightarrow$ Beh.

(10) VSS: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig

$M := \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) > 1\}$

Beh: M ist offen

offen/abgeschlossen falls $M = \mathbb{R}^3$

Bew: Falls $M = \emptyset$ offen in $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ M ist offen und abgeschlossen

Sei $M \neq \emptyset$ und nicht $\mathbb{R}^3$.

$(1, \infty)$ ist offen in $\mathbb{R}$, da $f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) \in (1, \infty)$ ist

$M = f^{-1}((1, \infty))$. Da f stetig ist und $(1, \infty)$ offen ist M offen

(11) VSS: $M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x^2+y+z| < 2, |z| < 1\}$

Beh: M_1 ist offen

Bew: $M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x^2+y+z| < 2\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| < 1\}$

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2+y+z$ stetige Fkt.

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = z$ stetige Fkt.

Dann ist $M_1 = f^{-1}((-2,2)) \cap g^{-1}((-1,1))$

da $(-2,2)$ und $(-1,1)$ offen sind und f, g stetig und wir endlichen $\cap$ haben

$\Rightarrow$ M_1 ist offen.

(M3): $M_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 e^y = \sin(z) - 1\}$

Beh: M_3 ist abgeschlossen

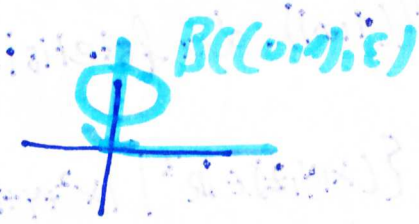
Bew: Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^4 e^y - \sin(z)$ ist stetig.

$\Rightarrow M_3 = f^{-1}(\{-1\})$ ist abgeschlossen, da $\{-1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und f ist stetig.

Beh: $M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \; y > 0\}$ ist nicht offen / abgeschlossen

Beh: "nicht offen"



Bew: Sei $(x,y) = (0,0)$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. dann ist $B((0,0);\varepsilon) \not\subseteq M_4$

$\Rightarrow M_4$ ist nicht abgeschl.

"nicht abgeschlossen"

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{n}\right); \left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $a_n \in M_4$ jedoch gilt:

$\lim_{n \to \infty} a_n = (0,0) \notin M_4 (y > 0)$

$\Rightarrow M_4$ ist nicht abgeschlossen.

$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x^2+y+z| < 2,\ |z| < 1\}$ [U_1 offen $\wedge$ $\mathbb{R}$ = offen + kompakt

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x^2+y+z| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{R} \mid |z| < 1\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x^2+y+z| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{R} \mid |z| < 1\} \times \mathbb{R}^2$

$\{(x,y,z) \mid |z| < 1\}$

(12) VSS: $E = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

Beh. E ist kompakt

Bew. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von E.

Sei U_1 die offene Menge s.d. $0 \in U_1$.

Dann ~~ist~~ gibt es ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n > \tilde{N}: \frac{1}{n} \in U_1$

Somit gibt es nur endlich viele Elemente von E die nicht in U_1 liegen. Wähle $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_{n_0}}$ s.d. $\forall x \in E: x \in U_1 \cup U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_{n_0}}$.

Dies sind endlich viele und somit ist E kompakt.

Alternativ II: $E = \{a\} \cup \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$

III: Nach Aufgabe (9.6) bewiesen ist E abgeschlossen da $E = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n\}}$

zudem ist E beschränkt. Nach Heine-Borel somit kompakt

(13) VSS. (X, d_1) d_1-diskrete Metrik

(Y, d_2) d_2-Metrik

Beh. $f: X \to Y$ ist stetig

Bew. Sei W eine offene Menge in Y

$f^{-1}(W) \subseteq X$ und somit offen $\quad d(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$

da sei U eine beliebige Teilmenge in X.

$\{x\} \Rightarrow B(x, \frac{1}{2}) = \{y \in X \mid d(x,y) < \frac{1}{2}\} = \{x\}$

$\Rightarrow f^{-1}(W) = \bigcup_{x \in X} \{x \in X \mid f(x) \in W\}$ offen ... stetig!

(13) VSS: $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + \frac{1}{2}y^2 = 3\}$

Beh: M ist kompakt

Bew: Da $M \subseteq \mathbb{R}^2$ zeigen wir, dass M ist abgeschlossen und beschränkt nach Heine-Borel folgt dann die Beh.

I Abgeschlossen

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + \frac{1}{2}y^2$ ist stetig

Da $M = f^{-1}[\{3\}]$ und da f stetig ist und $\{3\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ M ist abgeschlossen

II Beschränkt

Sei $(x,y) \in M$ bel. Es gilt:

$x^4 = 3 - \frac{1}{2}y^2$

$x = \pm \sqrt[4]{3 - \frac{1}{2}y^2}$ Da $x \in \mathbb{R}$ ist muss $3 - \frac{1}{2}y^2 \geq 0$ sein.

Dann muss $6 \geq y^2 \Rightarrow \pm\sqrt{6} \geq y \Rightarrow |y| \leq \sqrt{6}$ I

Somit ist $|y|$ beschränkt.

Zudem gilt:

$\frac{1}{2}y^2 = 3 - x^4$

$y^2 = 6 - 2x^4$

$y = \pm\sqrt{2(3-x^4)} = \pm\sqrt{2}\sqrt{3-x^4}$

Da $y \in \mathbb{R}$ muss $3 - x^4 \geq 0 \Rightarrow \pm\sqrt[4]{3} \geq x \Rightarrow |x| \leq \sqrt[4]{3}$ II

I & II

$\Rightarrow M \subseteq [-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}] \times [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

$\Rightarrow$ M ist beschränkt und abgeschlossen

Heine-Borel

$\Rightarrow$ M ist kompakt

(14) VSS: $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^4 = x^3 - x^4\}$

Beh: M ist kompakt

Bew: I Beschränkt.

Für alle $(x,y) \in M$ gilt $y^4 = x^3(1-x)$

Beschränktheit von x für $(x,y) \in M$:

Angenommen: $|x| > 1$

$\Rightarrow x^4 > |x|^3 > 1 \Rightarrow y^4 < 0$ ↯

$\Rightarrow |x| \leq 1$.

Damit ist y auch beschränkt, denn für y gilt:

$0 \leq y^4 = x^3 - x^4 \leq x^3 + x^4 \leq 2$

$\Rightarrow |y| < \sqrt[4]{2}$

$\Rightarrow M \subseteq [-1,1] \times [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}]$ somit beschränkt.

II Abgeschlossen

Sei $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto g(x,y) = y^4 - x^3 + x^4$ stetig in (x,y)

Da $M = g^{-1}[\{0\}]$ ist M als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter stetiger Abb. abgeschlossen.

(17) VSS. $A: C_R([0,1]) \to C_R([0,1])$

$f \mapsto A(f) = x^2 f(x)$

Beh: A ist eine Lineare Abbildung auf $C_R([0,1])$

A ist stetig bzgl. Maximumsnorm

Bew: Sei $f, g \in C_R([0,1])$.

I $A(f+g) = x^2((f+g)(x)) = x^2(f(x)+g(x)) = x^2 f(x) + x^2 g(x) = A(f) + A(g)$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$: $A(\lambda f) = x^2(\lambda f(x)) = \lambda x^2 (f(x)) = \lambda (x^2 f(x)) = \lambda A(f)$

Somit ist A linear

II Seien $f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$.

$\|A(f)\|_\infty = \|x^2 f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |x^2 f(x)| \leq \left(\max_{x\in[0,1]} |x^2|\right)^2 \left(\max_{x\in[0,1]} |f(x)|\right) = \|f\|_\infty \leq 1$

$\Rightarrow$ A ist beschränkt und somit stetig.

(18) VSS. V ist ein reeller Banachraum.

Sei $f: L(V) \to L(V)$

$A \mapsto A^2$

Ges. f' Bild/Ausdruck und f'

Lös: Nach Def: $f': L(V) \Rightarrow L(L(V), L(V))$

Es gilt $\frac{d}{dA} A = id_{L(V)} \; (B \mapsto B)$

$f'(A) = \frac{d}{dA} A^2 = \frac{d}{dA}(A \cdot A) \overset{P.R.}{=} \left(\frac{d}{dA} A\right) A + A \left(\frac{d}{dA} A\right)$

$= id\, A + A \cdot id$

Q.h. Sei $B \in L(V)$: $f'(A) \cdot B = \underline{BA} + \underline{AB}$

(19) VSS. Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und
$X := (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ der Banachraum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$
mit Maximumsnorm.
Sei $k \in C^0([a,b] \times [a,b])$.

Sei $A: X \to X$

$$u \mapsto (Au)(x) = \int_a^b k(x,y)\, u(y)\, dy \quad x \in [a,b]$$

Beh: 1) A ist linear

Bew: $(A(\lambda v + w)) = \lambda Av + Aw$
$A(\lambda v) = \lambda (Av)$

Sei $u, v \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(A(u + \lambda v))(x) = \int_a^b k(x,y)\,(u(y) + \lambda v(y))\, dy$$
$$\overset{\text{Lin}}{=} \int_a^b u(y)\, k(x,y)\, dy + \lambda \cdot \int_a^b v(y)\, k(x,y)\, dy$$
$$= (Au)(x) + \lambda (Av)(x) \Rightarrow A \text{ ist stetig}$$

2) A ist stetig

Bew: $\|A\| = \sup\{\|Av\| \mid v \in B(0,1)\} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_X}{\|v\|_Y}$ für $A: X \to Y$

Hier: Sei $u \in X$ bel.

$$\|Au\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |(Au)(x)| = \sup_x \left| \int_a^b u(y)\, k(x,y)\, dy \right|$$
$$\leq \sup_x \int_a^b |u(y)|\, |k(x,y)|\, dy$$
$$\leq \sup_x \int_a^b \sup_{y \in \mathbb{R}} |u(y)|\, |k(x,y)|\, dy$$
$$= \sup_y |u(y)| \sup_x \int_a^b |k(x,y)|\, dy = \|u\| \cdot \sup_x \int_a^b |k(x,y)|\, dy$$

Da k stetig auf $[a,b] \times [a,b]$, ist $\sup_x \int_a^b |k(x,y)|\, dy < \infty$

$\Rightarrow \|A\| = \sup_u \frac{\|Au\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq \sup_x \int_a^b |k(x,y)|\, dy < \infty \Rightarrow \exists C > 0 : \forall u \in X : \|Au\| \leq C \|u\|$

(28) $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten

mit Norm: $\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$

$A\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ $\quad B\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$

Frage:

~~Zeige~~: A, B sind Lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}[X]$ und stetig ?

Bem. I A ist linear und B ist linear

Sei $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $\sum_{l=0}^{m} b_l X^l$ zwei Polynome

O.b.d.A. $n = m$, falls nicht $n < m$ setze Koeffizienten $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_m = 0$

Nun zur Linearität:

$$A\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = A\left(\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k (a_k + b_k) X^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} k b_k X^{k-1}$$

$$= A\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + A\left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right)$$

Selbes Vorgehen für B.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$: $A\left(\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = A\left(\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k \lambda a_k X^{k-1}$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \lambda A\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right).$$

~~$= \lambda A$~~

Selbes für B:

$\Rightarrow$ A, B sind linear

! Beschränkt:
$\exists C > 0 : \forall v \in V.$
$\|Av\| \leq C \|v\|$

Beh. A ist nicht stetig, jedoch ist B stetig.

Bew: Sei $p_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1}$ $n \in \mathbb{N}$

$$\|p_n\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \cdot n+1 = 1$$

Es gilt: $\|A(p_n)\| = \| \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} x^{k-1} \| = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{Gauß Summe}}{=} \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot 1$

$$\Longleftrightarrow \frac{\|A(p_n)\|}{\underbrace{\|p_n\|}_{(=1)}} = \frac{n}{2} \quad \text{da } \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} = \infty \text{ gilt:}$$

$\Rightarrow \nexists C > 0 : \|Ap_n\| \leq C \|p_n\|$ und somit gilt nach 9.56, dass

A ist nicht stetig:

Für B gilt: Sei $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$\sup_{\substack{p \in \mathbb{R}[x] \\ \|p\|=1}} \|B(p)\| = \sup_{\substack{p \in \mathbb{R}[x] \\ \|p\|=1}} \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \right\|.$$

$$= \sup_{\substack{p \in \mathbb{R}[x] \\ \|p\|=1}} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{a_k}{k+1} \right| \leq \sup_{\substack{p \in \mathbb{R}[x] \\ \|p\|=1}} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = 1 \qquad \|p\| = 1, \text{ falls } \sum_{k=0}^{n} |a_k| = 1$$

$\Rightarrow$ B ist beschränkt und damit stetig.

(20) VSS: Sei X die Menge aller stetigen Fktionen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Beh1: d_1 ist eine Metrik

Sei $f = 1 \in X$
$g = 1 - x \in X$
$\Rightarrow d(f,g) = |1-1| = 0$ jedoch gilt

$f(x) \neq g(x)$ $\forall x \in [0,1] \Rightarrow f \neq g \Rightarrow d_1$ ist eine Metrik

Beh2: $d_2(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\}$ ist eine Metrik

Bew: "$d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$"

Aus Def. da $|x| \geq 0$ für $x \neq 0$ und $x = 0$
$\Rightarrow \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1]$
$\Rightarrow f = g$

$\Leftarrow$!!! klar da $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1]$

(ii) klar

(iii) $d_1(f,h) = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x) - h(x)|\} \leq \max_x \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\}$

$\leq \max_x \{|f(x) - h(x)|\} + \max_x \{|g(x) - h(x)|\}$

$= d_1(f,g) + d_1(g,h)$

∎

Beh3: d_3 ist eine Metrik

Wir zeigen nur (iii)

$d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\,dx$

$= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|\,dx$

$= d_2(f,g) + d_2(g,h)$

(21) VSS. X Menge aller stetigen Fktionen $f: [0,2] \to \mathbb{R}$

$d(f,g) = \int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx$

$f_n(x) = \min\{x^n, 1\}$

I Beh. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy

Bew. Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Sei $N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m \geq N$ mit N sodass $\frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

dann gilt $d(f_n, f_m) = \int_0^2 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$

$\overset{\text{Lin}}{=} \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$

$+ \int_1^2 |\min\{x^n, 1\} - \min\{x^m, 1\}|\,dx$

$= 0$

$\leq \int_0^1 |f_n(x)|\,dx + \int_0^1 |f_m(x)|\,dx$

$= \int_0^1 x^n\,dx + \int_0^1 x^m\,dx$

$= \frac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{m+1} x^{m+1}\Big|_0^1$

$\leq \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Nach Def. ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy.

Behz: $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nicht in X.

Bew: Annahme: $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert in X.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$ mit $f \in X$.

Es gilt jedoch folgendes:

Sei $g = 0$ auf $[0,1]$, es gilt auf $[0,1]$, dass:

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, g)\Big|_{[0,1]} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x^n - 0|\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Da die Grenzfunktion eindeutig ist, gilt auf $[0,1]$, dass

$f = g$ I

Sei $h = 1$ auf $[1,2]$, es gilt auf $[1,2]$, dass.

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, h)\Big|_{[1,2]} = \lim_{n\to\infty} \int_1^2 |f_n(x) - 1|\,dx = 0 \quad \text{II}$$

Grenzfkt. eindeutig $\Rightarrow f = h$ auf $[1,2]$.

Somit gilt, dass f ist nicht stetig, eine solche Fkt kann sogar nicht mal existieren, da nach I $f(1) = g = 0$ und II $f(1) = h = 1$. ↯

$\Rightarrow (f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nicht in X.

(22) (1) Frage: Ist $(\mathbb{N}, d)$ vollständig mit d = euklidische Metrik?

Beh: $(\mathbb{N}, d)$ ist vollständig

Bew: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bel. Cauchyfolge in $(\mathbb{N}, d)$.

Dann gilt für bel. $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m > N$: $d(a_n, a_m) < \varepsilon$

Insbesondere gilt für $\varepsilon < 1$: $d(a_n, a_m) = |n_0 - m_0| < 1$ $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$

Dies gilt aber nur falls $a_n = a_m$.

Somit muss $\forall n, m > N$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge sein.

Dann gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ s.d. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bel. war ist $(\mathbb{N}, d)$ vollständig

(2) Beh: $((0,1), d)$ ist nicht vollständig

Bew: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge denn

Sei $\varepsilon > 0$ bel. und $N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m > N$ mit $\frac{2}{N} < \varepsilon$

gilt: $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Es gilt jedoch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \notin (0,1)$.

Somit ist $((0,1), d)$ nicht vollständig.

(3) Beh: $((0,1), d)$ mit d-diskrete Metrik ist vollständig

Bew: Da $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ gilt für jede Cauchyfolge, dass

Sie irgendwann konstant ist. D.h. für alle $n, m > N$ gilt: $a_n = a_m$

Da alle Folgenglieder in $(0,1)$ liegen ist $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in (0,1)$.

und somit folgt die Beh.