Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I

21. November 2019

13. Übung

51. Achtung Die Kurve! III

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{1+x^4}.$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und finden Sie alle kritischen Punkte von f. [Hinweis: Es gibt genau drei kritische Punkte, welche im Folgenden mit $x_1 < x_2 < x_3$ bezeichnet seien.] *(2 Bonuspunkte)*

(b) Untersuchen Sie, ob f auf den Intervallen $(-\infty, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3]$ und $[x_3, \infty)$ jeweils monoton wachsend, monoton fallend oder keines von beidem ist. *(2 Bonuspunkte)*

(c) Entscheiden Sie für die kritischen Punkte von f jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beidem handelt. Berechnen Sie außerdem die zugehörigen Funktionswerte. *(2 Bonuspunkte)*

(d) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. *(2 Bonuspunkte)*

(e) Skizzieren Sie den Graphen von f. *(2 Bonuspunkte)*

(f) Untersuchen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, ob die Funktion f ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt und bestimmen Sie gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. *(2 Bonuspunkte)*

52. Stammfunktionen

Berechnen Sie die folgenden (auf geeigneten Definitionsbereichen definierten) Stammfunktionen und machen Sie bei (a) bis (c) jeweils die Probe durch Differentiation.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *(2 Bonuspunkte)*

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *(2 Bonuspunkte)*

(c) $\displaystyle\int x \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$ *(2 Bonuspunkte)*

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ [Tipp: Partialbruchzerlegung] *(2 Bonuspunkte)*

53. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{\exp(1/x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ *(3 Bonuspunkte)*

(b) $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ *(3 Bonuspunkte)*

Bitte wenden.

54. Ein Integral aus der Fourier-Analysis

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases} .$$

[Tipp: Für $m \neq n$ wende man zweimal partielle Integration an, um zu zeigen, dass ein gewisses Vielfaches des gesuchten Integrals verschwindet. Für $m = n$ wende man einmal partielle Integration und anschließend die Gleichung $\sin^2 = 1 - \cos^2$ an.] *(4 Bonuspunkte)*

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 29. November 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen