

12. Übung

47. Ab ins Krankenhaus.

- (a) Bestimme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\tan(7x)}$. (2 Punkte)
- (b) Zeige: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$. (2+2 Punkte)
- (c) Bestimme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. (2 Punkte)
- (d) Bestimme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$. (2 Punkte)
- (e) Zeige $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ und bestimme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln(x))$. (2+2 Punkte)

48. Tangens tanzen.

- (a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Zeige, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ unter dieser Substitution gebrochen rationale Funktionen von t sind. [Man darf das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) verwenden.] (3 Punkte)
- (b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass
 - (i) $\left| \frac{1+it}{1-it} \right| = 1$. (1 Bonuspunkt)
 - (ii)

$$\arctan(t) = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$$

[Tipp: Setze $x = \arctan(t)$. Dann gilt $t = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = [\dots]$. Führe eine Variablensubstitution $z = [\dots]$ durch und löse nach z auf.] (3 Punkte)

49. Achtung die Kurve!

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\exp(2x) - \exp(5x)}{\exp(7x) - \exp(x)} & \text{für } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist. (3 Punkte)
- (b) Untersuche f auf lokale Extrema. Sind diese (falls existent) auch *globale* Extrema? (3 Punkte)
- (c) Untersuche f auf Monotonie und bestimme das Verhalten für $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. (2 Punkte)
- (d) Bestimme den Wertebereich von f . (2 Punkte)

50. Achtung die Kurve! II

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$$

- (a) Bestimme die Nullstelle(n) von f . *(3 Bonuspunkte)*
- (b) Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist. *(3 Bonuspunkte)*
- (c) Untersuche f auf lokale Extrema. Sind diese (falls existent) auch *globale* Extrema? *(3 Bonuspunkte)*
- (d) Untersuche f auf Monotonie und bestimme das Verhalten für $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. *(3 Bonuspunkte)*
- (e) Bestimme den Wertebereich von f . *(3 Bonuspunkte)*

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 22. November 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen