Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I

31. Oktober 2019

10. Übung

38. Kontinuität durch Gleichheit.

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f in $x_0 \in X$ *linksseitig stetig* (bzw. *rechtsseitig stetig*) ist, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $f_- : X \cap (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ (bzw. eine in x_0 stetige Funktion $f_+ : X \cap [x_0, \infty) \to \mathbb{R}$) gibt, die auf $X \cap (-\infty, x_0]$ (bzw. auf $X \cap [x_0, \infty)$) mit f übereinstimmt.

Beweise: f ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn f in x_0 sowohl linksseitig stetig als auch rechtsseitig stetig ist mit $f(x_0) = f_-(x_0) = f_+(x_0)$. *(5 Punkte)*

39. Quantorendschungel Part II

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Nach Definition 5.20 heißt f *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\; |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

Welche der folgenden Aussagen sind *äquivalent* zur gleichmäßigen Stetigkeit von f? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a) $\exists \delta > 0 \; \forall \epsilon > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\; |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(3 Punkte)*

(b) $\forall x_0 \in X \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in B(x_0, \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ *(3 Punkte)*
(mit $B(x_0, \delta)$ ist hierbei der Ball in X um x_0 mit Radius δ gemeint, vgl. Definition 5.1)

(c) $\forall \epsilon > 0 \; \exists c > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\; |x_1 - x_2| < c\delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(2 Punkte)*

(d) $\forall \epsilon > 0 \; \exists c > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\; |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < c\epsilon)$ *(2 Punkte)*

40. Punktweise oder Gleichmäßig.

Wir definieren die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \begin{cases} 2n^2 x & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 x & \text{falls } \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(1 Punkt)*

(b) Zeigen Sie, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. *(2 Punkte)*
[Tipp: Aufgabe 38.]

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. *(3 Punkte)*

(d) Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist. *(3 Punkte)*

41. Spielwiese der Stetigkeit.

(a) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. *(4 Bonuspunkte)*

(b) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. *(2 Bonuspunkte)*

(c) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x},$$

von der wir bereits aus Aufgabe 37 wissen, dass sie stetig ist.

(i) Zeigen Sie, dass $f|_{[1,\infty)}$, d.h. die Einschränkung von f auf das Intervall $[1, \infty)$, Lipschitz-stetig ist. *(2 Punkte)*

(ii) Zeigen Sie, dass f auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$ ist. [Tipp: Satz 5.22] *(4 Punkte)*

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 08. November 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen