Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I

18. Oktober 2019

8. Übung

29. Kleine Aufgabensammlung.

Diese Aufgabe dient zum Einüben möglicher (insbesondere nicht garantierter!) Typen von Klausuraufgaben aus der Zwischenklausur. Sie wird nicht bewertet und ist rein als Angebot zur Selbstkontrolle zu verstehen. Die Länge dieser Aufgabe lässt auch keine Rückschlüsse auf die Länge der Klausur zu. Bitte beachte auch insbesondere die gewerteten Aufgaben dieses Übungszettels.

(a) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $\Im(z^2) = 2$ erfüllen, und skizziere die Lösungsmenge.

(b) Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

(c) Wir betrachten die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}\ .$$

(i) Zeige, dass f streng monoton wachsend ist.

(ii) Bestimme Supremum und Infimum der Menge $\{\, f(n) \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ und untersuche, ob diese Menge ein Maximum und/oder ein Minimum besitzt.

(d) Man bestimme für die folgenden Folgen alle ihre Häufungspunkte, und untersuche, ob sie in $\mathbb{K}$ konvergieren.

(i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(ii) $c_n := (1 - \frac{1}{n})^n$

(iii) $d_n := (1 + \imath^n) \cdot \frac{6n+7}{3n+2}$

(e) Beweise: Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

(f) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Zahlenfolgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern voneinander unterscheiden, d.h. für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = b_n$. Zeige, dass dann (a_n) genau dann in $\mathbb{K}$ konvergiert, wenn (b_n) in $\mathbb{K}$ konvergiert, und dass im Falle der Konvergenz die Grenzwerte dieser beiden Folgen übereinstimmen.

(g) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Zahlenfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$b_n := \sup\{\, a_k \,|\, k \geq n \,\}$$

definierte Folge. Zeige:

(i) Die Folge (b_n) ist eine reelle Zahlenfolge, sie ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

(ii) Die Folge (b_n) ist in $\mathbb{R}$ konvergent, und zwar gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim}\, a_n$.

30. Drei(h)erlei.

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$. (Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden.)

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ *(2 Punkte)*

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k^3}$ *(2 Punkte)*

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k^4+k^2+14k+30}{2k^4+2k^3+k+12}$ *(2 Punkte)*

31. Bruchlandung.

Beweise, dass die folgende Reihe in $\mathbb{R}$ konvergent ist und berechne ihren Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}\,.$$ *(3 Punkte)*

[Tipp: Man schreibe $\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{\alpha}{2k-1}+\frac{\beta}{2k+3}$ mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.]

32. Konvergenz im Quadrat (no Mannheim-pun intended).

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(a) Beweise: Wenn $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ absolut in $\mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ absolut in $\mathbb{R}$. *(4 Punkte)*

(b) Belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Umkehrung von (a) falsch ist. *(1 Punkt)*

(c) Belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage von (a) falsch wird, wenn man „absolute Konvergenz" jeweils durch „Konvergenz" ersetzt *(1 Punkt)*

33. Monotonangebend.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Zahlenfolge mit $a_n>0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass dann $(n\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(5 Punkte)*

[Tipp: Man verwende entweder das Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 4.3) oder Cauchy's Verdichtungssatz (Satz 4.12).]

(b) Bleibt die Aussage von (a) richtig, wenn man auf die Voraussetzung, dass $(a_n)_n$ monoton fallend sein soll, verzichtet? Man gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. *(4 Zusatzpunkte)*

34. Konvergenz in der Potenz (no Mannheim-pun possible).

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Wir untersuchen die hierdurch bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(a) Beweise: Falls $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ einen Grenzwert α besitzt, so ist $R := \frac{1}{\alpha}$ der Konvergenzradius obiger Potenzreihe. *(4 Punkte)*

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bestimme $\alpha_1 := \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\alpha_2 := \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, sowie den Konvergenzradius R der zugehörigen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ und folgere, dass $R \neq \frac{1}{\alpha_1}$ und $R \neq \frac{1}{\alpha_2}$ gilt.
Bemerkung: Dies zeigt, dass im Allgemeinen die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zur Bestimmung des Konvergenzradius nicht geeignet ist. *(4 Punkte)*

(c) Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}\, x^n$ *(1 Punkt)*

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ *(1 Punkt)*

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 25. September 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.

Informationen zur Zwischenklausur:

Die **Zwischenklausur** zur Analysis I findet am **Samstag, 26. Oktober 2019 von 10:15 bis 11:45 Uhr im Raum A3, 001** statt. Eine separate Anmeldung zur Zwischenklausur ist nicht erforderlich. Die Zwischenklausur wird als 9. Übungsblatt gewertet (mit etwas mehr Punkten als auf den regulären Übungsblättern). Das bedeutet, dass die in der Zwischenklausur gesammelte Punktzahl zu den Punkten der regulären Übungsblätter addiert wird und in die Berechnung der bekannten 50%-Grenze für die Zulassung zur Abschlussklausur mit eingeht. Der Stoff der Zwischenklausur ist der Stoff der Vorlesung bis einschließlich zum 25.10.2019.
Für die Zwischenklausur brauchen Sie kein Schreibpapier mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird.
Als *Hilfsmittel* dürfen Sie ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt mitbringen und während der Klausur verwenden. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten, ...) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes Handy ist während der Zwischenklausur abzuschalten.