Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I

11. Oktober 2019

7. Übung

25. Zweierlei.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent sind. Sei H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Beweisen Sie, dass $H = \{\lim_{n\to\infty} a_{2n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}\}$ gilt.

[*Bemerkung:* Bei reellen Teilfolgen mit $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \pm\infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \pm\infty$ gilt die Aussage ebenfalls, das brauchen Sie aber nicht zu zeigen.] *(4 Punkte)*

26. Mehrerlei.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{kn})_{n\in\mathbb{N}}, (a_{kn+1})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_{kn+(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Sei H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie: $H = \{\lim_{n\to\infty} a_{kn}, \lim_{n\to\infty} a_{kn+1}, \ldots, \lim_{n\to\infty} a_{kn+(k-1)}\}$.
[Tipp: Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 25. Der Beweis von Aufgabe 25 mag daher hilfreich sein.]

[*Bemerkung:* Auch hier gilt die analoge Verallgemeinerung aus Aufgabe 25.] *(4 Punkte)*

(b) Formulieren Sie eine Verallgemeinerung von (a) für *beliebige* Teilfolgen (einen Beweis müssen Sie nicht angeben). *(2 Zusatzpunkte)*

27. Quantorendschungel.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder Gegenbeispiel.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{1}{\varepsilon}$. *(3 Punkte)*

(b) $\exists c > 0 \,\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall n \geq N : |a_n - a| < c\varepsilon$. *(3 Punkte)*

(c) $\forall \varepsilon > 0 \,\exists c > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall n \geq N : |a_n - a| < c\varepsilon$. *(3 Punkte)*

(d) $\forall \varepsilon > 0 \,\forall N \in \mathbb{N} \,\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$. *(3 Punkte)*

28. Limes Superior. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkte reelle Zahlenfolgen, deren Menge reeller Häufungspunkte jeweils nicht leer sei.

(a) Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Allgemeinen keinen reellen Häufungspunkt haben muss. *(3 Punkte)*

(b) Beweisen Sie: $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$. *(5 Punkte)*

(c) Belegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass $\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$ im Allgemeinen *nicht* gilt. *(3 Zusatzpunkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.
Beachten Sie ausserdem: Falls Sie nichts anderes lesen, dürfen Sie NUR den Stoff aus der Vorlesung und/oder aus den vergangenen Übungsblättern benutzen.

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 18. Oktober 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.