Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I

27. September 2019

5. Übung

16. Max Power and Supremumman.

Es seien X und Y nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeige:

(a) $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$ *(3 Punkte)*

(b) Ist $\inf X > 0$, so besteht für das Supremum der Menge $Z := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} \in X\}$ der Zusammenhang: $\sup(Z) = (\inf X)^{-1}$. *(4 Punkte)*

17. Bernoulli Reloaded.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

sofern $x_k \geq 0$ für alle $k \geq 1$ oder falls $-1 \leq x_k < 0$ für alle $k \geq 1$ gilt. *(Bonus: 6 Punkte)*

(b) Belege durch je ein Gegenbeispiel,

(i) dass die Ungleichung nicht für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt, wenn $x_k < -1$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt und *(Bonus: 2 Punkte)*

(ii) dass es nicht genügt, lediglich $x_k \geq -1$ für alle k zu fordern. *(Bonus: 2 Punkte)*

18. Runde Sache.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Gleichung

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

genau dann keine reelle Lösungen hat, wenn $|a| < 1$. Zeige außerdem, dass in diesem Fall die Gleichung zwei komplex konjugierte Lösungen hat, die in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ liegen. [*Tipp:* Benutze die quadratische Ergänzung.] *(Bonus: 4 Punkte)*

Bitte wenden.

19. Das Eckige im Runden.

(a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$ *(2 Punkte)*

(ii) $\frac{3+i}{4-i}$ *(2 Punkte)*

(iii) $\frac{(1+2i)^3-(1+i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ *(3 Punkte)*

(b) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden.
[Tipp: $z^3 - 1 = (z-1) \cdot (z^2 + z + 1)$.] *(5 Punkte)*

20. Kunstkurs.

Beschreibe die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene, indem Sie die Mengen vorher geeignet umformen:

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ *(3 Punkte)*

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < |z + 2|\}$ *(4 Punkte)*

(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : \Im((1+i)z) \geq 1\}$ *(4 Punkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 04. Oktober 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.