Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I

20. September 2019

4. Übung

12. Doch recht viel Platz.

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-2, 3) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{t+2} & \text{für } t \le 0 \\ \frac{t}{3-t} & \text{für } t > 0 \end{cases}. \qquad \textit{(9 Punkte)}$$

[Tipp: Man zeige, dass f das Intervall $(-2, 0]$ bijektiv auf das Intervall $(-\infty, 0]$, sowie das Intervall $(0, 3)$ bijektiv auf das Intervall $(0, \infty)$ abbildet. Warum folgt daraus die Bijektivität von f ?]

13. Endlich beschränkt.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. *(3 Punkte)*

(b) Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum. (Es genügt, die Aussage für das Maximum zu zeigen. Der Beweis für das Minimum geht analog.) *(4 Punkte)*

14. Unendlich beschränkt.

Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschränkt sind und bestimmen Sie (mit Begründung!) ihr Infimum und ihr Supremum. Untersuchen Sie auch, ob Infimum und Supremum jeweils Elemente der Menge (und damit ihr Minimum bzw. Maximum) sind.

(a) $A := \{\frac{x^2}{1+x^2} | x \in \mathbb{R}\}$ *(4 Punkte)*

(b) $B := (0, 1) \setminus \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ *(4 Punkte)*

15. Potenzielles Wachstum.

Sei $\mathbf{K}$ ein angeordneter, archimedischer Körper. Zeige, dass für $b \in \mathbf{K}$ folgendes gilt:

(a) Ist $b > 1$, so gibt es zu jeder Zahl $K \in \mathbf{K}$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n > K.$$

[*Hinweis:* Benutzen Sie Bernoullis Ungleichung (Satz 2.32) und die archimedische Eigenschaft (Satz 2.45 (i))] *(5 Zusatzpunkte)*

(b) Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n < \varepsilon.$$

[*Hinweis:* Diese Aussage lässt sich aus (a) folgern.] *(3 Zusatzpunkte)*

Bitte wenden.

(c) Sei nun $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Untersuchen für welches $b > 0$ die Menge $\{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Infimum, Supremum, Maximum, Minimum besitzt und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(6 Punkte)

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 27. September 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.