Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I

13. September 2019

3. Übung

8. Elementare Rechnenregeln.
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Regeln:

(a) $\big(a < b \text{ und } c < d\big) \implies a + c < b + d\,.$ *(2 Punkte)*

(b) $\big(0 < a < b \text{ und } 0 < c < d\big) \implies ac < bd\,.$ *(2 Punkte)*

(c) $ab > 0 \iff \big(a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0\big)\,.$ *(5 Punkte)*

(d) $ab < 0 \iff \big(a > 0, b < 0 \text{ oder } a < 0, b > 0\big)\,.$ *(5 Punkte)*

9. Eine Ecke mehr.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die sog. *Parallelogrammungleichung*: $|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|\,.$
[Tipp: Man zeige zuerst $|a+b| + |a-b| \geq 2\,|a|$.] *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2\,.$$

[Tipp: Man überlege sich, dass es ausreicht, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für $x > 0$ zu beweisen. Hierfür zeige man zunächst $(x-1) \cdot (\frac{1}{x} - 1) \leq 0$.] *(4 Punkte)*

10. Grundschulmathematik.

Man zeige:

(a) die berühmte Gaußsche Summenformel: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *(3 Punkte)*

(b) $n^2 \leq 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 3$.

(Bonus: 6 Punkte)

11. Eine ganzheitliche Vereinigung.
Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen mit $M \cup N = \mathbb{R}$, so dass $x < y$ für alle $x \in M$ und alle $y \in N$ gilt. Zeigen Sie, dass M nach oben und N nach unten beschränkt ist und dass

$$\sup(M) = \inf(N)$$

gilt. *(6 Punkte)*

Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 20. September 2019, 10:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.