Formale Gesichtspunkte des mathematischen Beweises

1 Verschiedene Beweisverfahren

1.1 Der direkte Beweis

Hierbei wird eine Aussage A aus schon bekannten Aussagen geschlussfolgert.
Beispiele sind die Beweise der Sätze 2.6, 2.8, 2.15, 2.16, 2.30, 2.50.

1.2 Der indirekte Beweis

Hierbei wird angenommen, dass die zu zeigende Aussage A falsch ist, und dann daraus eine Aussage geschlussfolgert, von der schon bekannt ist, dass sie falsch ist, d.h. man hat einen Widerspruch zu der Annahme gefunden. Dann kann die Annahme nicht richtig sein, und A ist richtig.
Beispiele sind die Beweise der Sätze 2.45 (i), 2.52 und Lemma 2.49.

1.3 Der indirekte Beweis, dass aus der Aussage A die Aussage B folgt

Um zu begründen, warum aus der Aussage A die Aussage B folgt, genügt es zu zeigen, dass daraus, dass die Aussage B nicht gilt, auch folgt, dass die Aussage A nicht gilt.
Ein Beispiel ist, wie im Beweis von Satz 3.10 (i) begründet wird, warum für positive reelle Zahlen a und b aus der Ungleichung $a^n < b^n$ die Ungleichung $a < b$ folgt. Es wird nämlich gezeigt, dass aus $a \geq b$ auch $a^n \geq b^n$ folgt.

1.4 Der Beweis durch vollständige Induktion

Dieses Beweisverfahren ist nur auf Aussagen über die natürlichen Zahlen oder eine Teilmenge von ihnen möglich. Die zu zeigende Aussage sollte also von der Form $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ sein. Für eine solche Aussage wird folgendes gezeigt:

(i) Die Aussage $A(1)$ wird gezeigt.

(ii) Unter der Annahme, dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ gilt, wird die Aussage $A(n+1)$ gezeigt.

Dann ist die Teilmenge $S = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist richtig } \}$ eine induktive Teilmenge, und wegen Satz 2.31 also gleich $\mathbb{N}$.
Beispiele sind die Beweise der Sätze 2.32, 2.33.

2 Zerlegung in Teilbeweise

2.1 Der Beweis durch Fallunterscheidung

In manchen Fällen ist es günstig, zwischen verschiedenen Fällen zu unterscheiden, weil die Argumentation in den unterschiedenen Fällen unterschiedlich verläuft. Dann müssen alle auftretenden Fälle aufgelistet werden. Dabei ist darauf zu achten, dass alle aufgelisteten Fälle zusammen die Aussage ergeben. Jeder einzelne Fall wird dann einzeln bewiesen, d.h. duch ein Beweiseverfahren aus dem ersten Abschnitt.

Beispiele sind die Beweise von Satz 2.19 (iii) und Satz 2.47.

2.2 Der Beweis, dass zwei Zahlen gleich sind

Manchmal ist es einfacher von zwei reellen Zahlen a und b getrennt zu zeigen, dass sowohl $a \leq b$ also auch $b \leq a$ gilt, als direkt $a = b$ zu zeigen. Dann wird der Beweis von $a = b$ in zwei Teilbeweise zerlegt, die jeweils $a \leq b$ und $b \leq a$ zeigen.

Ein Beispiel ist der Beweis der Gleichung $b^2 = a$ im Beweis der Existenz von Satz 2.48. Es wird nämlich indirekt gezeigt, dass $b^2 \geq a$ gilt, weil $b^2 < a$ nicht gilt, und dass $b^2 \leq a$ gilt, weil $b^2 > a$ nicht gilt.

2.3 Der Beweis, dass zwei Mengen gleich sind

Manchmal ist es einfacher von zwei Mengen A und B getrennt zu zeigen, dass sowohl $A \subset B$ also auch $B \subset A$ gilt, als direkt $A = B$ zu zeigen. Dann wird der Beweis von $A = B$ in zwei Teilbeweise zerlegt, die jeweils $A \subset B$ und $B \subset A$ zeigen.

2.4 Der Beweis einer Äquivalenz von zwei Aussagen

Oft ist es einfacher von zwei Aussagen A und B getrennt zu zeigen, dass sowohl B aus A folgt als auch A aus B folgt, als direkt die Äquivalenz von A und B zu zeigen. Dann wird der Beweis der Äquivalenz von A und B in zwei Teilbeweise zerlegt, die jeweils B folgt aus A und A folgt aus B zeigen. Die Äquivalenz von meheren Aussagen wird entsprechend in mehrere Teilbeweise zerlegt, wobei jede Aussage einerseits aus einer anderen folgen muss und aus jeder Aussage auch eine andere geschlussfolgert wird. Dabei muss man darauf achten, dass man durch Kombination der gezeigten Schlussfolgerungen aus jeder Aussage jede andere schlussfolgern kann.

Ein Beispiel ist der Beweis von Satz 3.16.

2.5 Beweis, dass ein mathematisches Objekt eine Definiton erfüllt

Oft werden bestimmte mathematische Begriffe durch mehrere Eigenschaften definiert. Um dann zu zeigen, dass ein gegebenes mathematisches Objekt unter diesen Begriff fällt (also die Definition erfüllt), wird jede der Eigenschaften einzeln gezeigt.

Beispiele sind die Definitionen von Minima, Maxima, Supremum und Infimum: Ein Minimum einer nichtleeren Teilmenge der reellen Zahlen ist eine reelle Zahl, die

(i) Element der Menge ist, und

(ii) eine untere Schranke der Menge ist.

Um also von einer Zahl a zu zeigen, dass a das Minimum einer Mengen M ist, muss erstens $a \in M$ gezeigt werden, und zweitens $a \leq b$ für alle $b \in M$.

Das Supremum einer nichtleeren nach oben beschränkten Teimenge M der reellen Zahlen ist als ein Minimum der oberen Schranken definiert ist. Um also von einer reellen Zahl a zu zeigen, dass $a = \sup M$ gilt, muss erstens gezeigt werden, dass $a \geq b$ für alle $b \in M$ gilt, und dass $a \leq c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt, die $c \geq b$ für alle $b \in M$ erfüllen.
Ein Beispiel ist, wie im Beweis von Satz 3.17 gezeigt wird, dass s das Supremum der Menge M ist.

3 Häufige Fehlerquellen

3.1 Schlussumkehr bei der Umformung des Zieles

Am Anfang eines mathematischen Schlusses steht oft eine zu zeigende Schlussfolgerung, d.h. aus einer Aussage A (z.B. einer Gleichung) soll eine andere Aussage B (z.B. auch eine Gleichung) geschlussfolgert werden. Weil das Ziel B bekannt ist, bietet es sich an die Aussage B so umzuformen, dass man schließlich A erhält. Dabei hat man aber die Schlussrichtung umgedreht. Deshalb führt das nur zum Ziel, wenn die Umformungen alle Äquivalenzen sind. Nachdem es also gelungen ist, B in möglicherweise mehreren Schritten in A umzuformen, muss noch die Reihenfolge der Schritte wieder umgedreht werden, und auch nachgeprüft werden, dass diese Umformungen auch in der umgekehrten Reihenfolhe richtig sind. Der Beweis muss also am Schluss so aufgeschreiben werden, dass in mehreren Schritten aus der Aussage A die Aussage B geschlussfolgert wird.

3.2 Verneinen von Aussagen mit für alle oder es gibt

Die Verneinung der Aussage für alle $\epsilon > 0$ gilt die Aussage $A(\epsilon)$ ist die Aussage, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die Aussage $A(\epsilon)$ nicht gilt.

Die Verneinung der Aussage es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die Aussage $A(N)$ gilt, ist die Aussage für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage $A(N)$ nicht.
Das gilt auch für Kombinationen. Deshalb ist z.B. die Verneinung der Aussage, dass es eine Zahl a gibt, so dass es für alle $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, und dann $|a_n - a| < \epsilon$ für all $n \geq N$ gilt (die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert) folgende Aussage:
Für alle Zahlen a (mögliche Grenzwerte) gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass es für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ gibt, für das $|a_n - a| \geq \epsilon$ gilt.
Das ist dann äquivalent dazu, dass es für alle Zahlen a ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die $|a - b_n| \geq \epsilon$ erfüllt.
Ein Beispiel ist der Beweis von Satz 3.4 (v).