

Kapitel 8

Das Integral von Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$$

8.1 Regelfunktionen

Zunächst definieren wir das Integral für sogenannte Treppenfunktionen.

Definition 8.1 (Treppenfunktion). Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für jedes Intervall $I \subset [a, b]$ einschließlich der Intervalle, die nur aus einer Zahl bestehen, heißt

$$\chi_I : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von I . Ihre endlichen Linearkombinationen in $B([a, b], \mathbb{K})$ heißen Treppenfunktionen und bilden eine Unteralgebra. Die Grenzwerte in $B([a, b], \mathbb{K})$ von gleichmäßig konvergenten Folgen von Treppenfunktionen heißen Regelfunktionen.

Für ein beschränktes Intervall I ist $\mathbb{R} \setminus I$ eine disjunkte Vereinigung von zwei Intervallen und \mathbb{R} eine disjunkte Vereinigung von drei Intervallen, von denen eines I ist. Weil die Schnittmenge von zwei Intervallen entweder leer oder ein Intervall ist, zerfällt \mathbb{R} auch für endlich viele beschränkte Intervalle I_i in endlich viele disjunkte Intervalle J_j , so dass jedes I_i die disjunkte Vereinigung von endlich vielen J_j ist.

Satz 8.2 (Definition des Integrals). Für jede Treppenfunktion f auf $[a, b]$ und jede Zerlegung von $[a, b]$ in eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen J_j , auf denen f jeweils konstant ist, hängt folgendes Integral und nicht von der Wahl der J_j ab:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{y \in f[[a, b]]} y \sum_{J_j \subset f^{-1}\{y\}} |J_j|, \text{ wobei } |J_j| \text{ die Intervalllänge von } J_j \text{ ist.}$$

Beweis: Für jedes $y \in f[[a, b]]$ ist die Summe der Intervalllängen von $f^{-1}\{y\}$ unabhängig von der Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung von Intervallen. **q.e.d.**

Satz 8.3 (Integral und Hauptsatz für Regelfunktionen).

- (i) Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn es Funktionen $v : (a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ and $w : [a, b) \rightarrow \mathbb{K}$ gibt, und für jedes $x \in [a, b]$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - v(x)| < \epsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x) \cap [a, b]$ und $|f(y) - w(x)| < \epsilon$ für alle $y \in (x, x + \delta) \cap [a, b]$ gilt, d.h. $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = v(x)$ and $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = w(x)$. Die Regelfunktionen bilden eine Unteralgebra von $B([a, b], \mathbb{K})$, die $C([a, b], \mathbb{K})$ enthält und unter $f \mapsto |f|$ invariant ist.
- (ii) Jede Regelfunktion f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.
- (iii) Das Integral setzt sich zu einer eindeutigen linearen Abbildung von der Unteralgebra aller Regelfunktionen in $B([a, b], \mathbb{K})$ nach \mathbb{K} fort, die folgendes erfüllt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \|f\|_\infty.$$

- (iv) Für eine Regelfunktion f ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ mit $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\|f\|_\infty$ und genau bei den $x \in (a, b)$ differenzierbar, bei denen $v(x) = w(x)$ gilt. Dort gilt $F'(x) = v(x)$. Also ist F genau dann auf (a, b) differenzierbar, wenn $F' \in C([a, b], \mathbb{K})$ und wir $f = F'$ wählen können.

Beweis: (i): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ keine Regelfunktion. Dann gibt es für ein $\epsilon > 0$ keine Treppenfunktion g auf $[a, b]$ gibt, die folgendes erfüllt:

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Aus Treppenfunktionen g auf $[a, \frac{a+b}{2}]$ und auf $[\frac{a+b}{2}, b]$ die diese Ungleichung auf ihren Definitionsbereichen erfüllen, können wir eine solche Treppenfunktion g auf $[a, b]$ zusammensetzen. Also gibt es eine Folge von Intervallen $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ auf denen keine solche Treppenfunktion existiert, so dass $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ jeweils entweder $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ oder $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ und $[a_1, b_1] = [a, b]$ ist. Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip enthält $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ genau ein $x \in [a, b]$. Dann ist die Bedingung in (i) bei x nicht erfüllt, weil für hinreichend großes n sonst die Funktion g , die auf $(-\infty, x) \cap [a_n, b_n]$ gleich $v(x)$, auf $(x, \infty) \cap [a_n, b_n]$ gleich $w(x)$, und bei x gleich $f(x)$ ist, obige Ungleichung auf $x \in [a_n, b_n]$ erfüllt. Jede Funktion f , die die Bedingung in (i) erfüllt, ist also eine Regelfunktion.

Für jede Regelfunktion $f \in B([a, b], \mathbb{K})$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g \in B([a, b], \mathbb{K})$ mit $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Für jedes $x \in [a, b]$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass g auf $(x - \delta, x) \cap [a, b]$ und $(x, x + \delta) \cap [a, b]$ konstant ist. Dann ist der Abstand zwischen zwei Funktionswerten von f auf $(x - \delta, x) \cap [a, b]$ oder $(x, x + \delta) \cap [a, b]$ jeweils kleiner als ϵ . Das gilt für jedes $\epsilon > 0$ mit einem geeignet gewählten $\delta > 0$. Für gegen x konvergierende Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(-\infty, x) \cap [a, b]$ bzw. in $(x, \infty) \cap [a, b]$ sind $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen mit Grenzwerten $v(x)$ bzw. $w(x)$. Dann gilt (i) für f . Die letzte Aussage von (i) folgt.

(ii): Wenn x nicht zu den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen einer gleichmäßig gegen f konvergierenden Folge von Treppenfunktionen gehört, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass die Abstände zwischen zwei Funktionswerten von f auf $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$ kleiner als ϵ sind. Deshalb ist f an höchstens abzählbar vielen Punkten unstetig.

(iii): Für Treppenfunktionen folgt die Ungleichung in (iii) aus der Dreiecksungleichung. Für eine Regelfunktion f konvergieren dann die Integrale von allen Folgen von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergieren, gegen die gleiche Zahl. Deshalb setzt sich das Integral eindeutig zu einer Abbildung von den Regelfunktionen nach \mathbb{K} fort, und diese Fortsetzung ist auch linear und erfüllt die Ungleichung in (iii).

(iv): Für $x < y \in [a, b]$ gilt $|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq |y - x| \cdot \|f\|_\infty$. Also ist F Lipschitzstetig. Aus $|f(t) - z| < \epsilon$ für $t \in (x, y) \subset [a, b]$ folgt

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - z \right| \leq \frac{1}{|y - x|} \int_x^y |f(t) - z| dt < \epsilon.$$

Wegen (i) sind mit $z = v(y)$ bzw. $z = w(x)$ die Grenzwerte $\lim_{x \uparrow y-}$ bzw. $\lim_{y \downarrow x+}$ Null. Also ist F genau bei den $x \in (a, b)$ differenzierbar, bei denen $v(x) = w(x) = F'(x)$ gilt. Gilt das für alle $x \in (a, b)$, dann definieren wir $\tilde{f}(x) = v(x) = w(x)$ für $x \in (a, b)$ und $\tilde{f}(a) = w(a)$ und $\tilde{f}(b) = v(b)$. Für jedes $x \in [a, b]$ und jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, x) \cup (x, b]$ mit $\lim x_n = x$ gilt dann $\lim f(x_n) = \tilde{f}(x)$. Also erfüllt \tilde{f} (i) mit den gleichen v und w wie f , und ist stetig, und führt in (iv) zu dem gleichen $\tilde{F} = F$ mit $F' = \tilde{f}$. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 8.4. Zeige, dass reelle monotone Funktionen Regelfunktionen sind.

8.2 Technik des Integrierens

In Definition (8.16) wird das Integral auf eine Unteralgebra $\mathcal{R}[a, b]$ von $B([a, b], \mathbb{R})$ erweitert, die die Regelfunktionen enthält. Wenn für ein $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ein $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ existiert, das auf (a, b) differenzierbar ist mit $F' = f$, dann gilt für alle $[x, y] \subset [a, b]$

$$\int_x^y f(t) dt = F(y) - F(x), \quad \int_y^x f(t) dt = - \int_x^y f(t) dt = F(x) - F(y).$$

Definition 8.5 (Stammfunktion). Auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R} heißt eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ Stammfunktion von f und wird $\int f(x) dx$ bezeichnet. Die Differenz zweier Stammfunktionen von f ist auf einem Intervall konstant.

Beispiel 8.6. (i) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ für $\alpha \neq -1$ und entweder $\alpha \in \mathbb{N}$ oder $x \in (0, \infty)$.

(ii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ für $x \neq 0$.

(iii) $\int e^x dx = e^x + C$.

(iv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

(v) $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$.

(vi) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$.

(vii) $\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C$ für $x \notin \{(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(viii) $\int \cot(x) dx = \ln |\sin(x)| + C$ für $x \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ix) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$.

(x) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$ für $x \in [-1, 1]$.

Substitutionsregel 8.7. Sei $f \in C([a, b])$ und $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige auf (α, β) differenzierbare Funktion, so dass $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Dann gilt

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \left(\int f(x)dx \right) \circ \phi + C, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx.$$

Beweis: Wegen dem Hauptsatz 8.3 hat f eine stetig differenzierbare Stammfunktion F . Also ist $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi) \cdot \phi'$. Weil $\mathcal{R}[a, b]$ eine Unter algebra von $B([a, b], \mathbb{R})$ ist, die $C([a, b])$ enthält, folgt $(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ und die Aussage. **q.e.d.**

Wenn ϕ bijektiv ist, können wir auch umgekehrt schließen:

Korollar 8.8 (Transformation der Variablen). Sei $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ bijektiv, stetig und auf (α, β) differenzierbar mit $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ und $f \in C([a, b])$. Dann gilt

$$\int f(x)dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt \right) \circ \phi^{-1} + C, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt. \mathbf{q.e.d.}$$

Beispiel 8.9. (i)

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x) dx$$

Insbesondere ist das Restglied der Taylorformel in Satz 8.29 mit $t = x_0 + s(x - x_0)$

$$f(x) - T_{n, x_0}(x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(x_0 + s(x-x_0))(1-s)^n ds.$$

(ii)

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right) \frac{n}{a} t^{n-1} dt + C$$

für $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und einer Funktion $R(\cdot, \cdot)$ in zwei Variablen. Wir substituieren $t = \sqrt[n]{ax+b} \implies ax+b = t^n \implies x = \frac{t^n-b}{a}$ und $dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$.

(iii)

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int R(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \sinh t$, $\sqrt{x^2 + 1} = \cosh t$ und $dx = \cosh t dt$.

(iv)

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx = \pm \int R(\pm \cosh t, \sinh t) \sinh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \pm \cosh t$, je nachdem ob x in $[1, \infty)$ oder $(-\infty, -1]$ liegt. Dann gilt $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh t$ und $dx = \pm \sinh t dt$.

(v)

$$\int R(x, \sqrt{1 - x^2}) dx = \mp \int R(\pm \cos t, \sin t) \sin t dt + C.$$

mit der Substitution $x = \pm \cos t$, $\sqrt{1 - x^2} = \sin t$ und $dx = \mp \sin t dt$.

(vi)

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2} + C$$

mit der Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2 \arctan(t)$ und $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, so dass gilt

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x).$$

(vii)

$$\int R(\cosh x, \sinh x) dx = \int R\left(\frac{t^2 + 1}{2t}, \frac{t^2 - 1}{2t}\right) \frac{dt}{t} + C$$

mit der Substitution $t = e^x$, $x = \ln(t)$ und $dx = \frac{dt}{t}$.

Partielle Integration 8.10. Seien $f, g \in C([a, b])$ auf (a, b) differenzierbar mit $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann gilt

$$\int f g' dx = f g - \int f' g dx + C, \quad \int_a^b f g' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g dx.$$

Beweis folgt aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung und der Leibnizregel. **q.e.d.**

Beispiel 8.11. (i) $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln(x) - 1) + C.$

(ii) $\int \sqrt{1 - x^2} dx = x \sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx + C = x \sqrt{1 - x^2} - \int \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx + C$
 $\implies \int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C \quad \text{also} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

$$(iii) \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

$$(iv) \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx.$$

$$(v) \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx.$$

Partialbruchzerlegung 8.12 (Integration von rationalen Funktionen $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$).

1. Faktorisierung des Nenners. In der Algebra $\mathbb{K}[x]$ der reellen bzw. komplexen Polynome heißt $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ Teiler von $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, wenn es ein $r(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit $p(x) = q(x)r(x)$ gibt. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ in ein Produkt von Polynomen ersten Grades. $\mathbb{R}[x]$ ist in $\mathbb{C}[x]$ enthalten, und $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ ist genau dann reell, wenn $\overline{Q(x)} = Q(\bar{x})$ für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt. Deshalb sind die komplexen Nullstellen von $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ entweder reell oder komplex konjugierte Paare. Dabei ist $(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - 2\Re(x_0)x + |x_0|^2 \in \mathbb{R}[x]$. Also zerfällt $Q(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ in

$$Q(x) = C \prod_i (x - x_i)^{k_i} \prod_j (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j} \quad \text{mit } p_j^2 - 4q_j < 0.$$

Wenn wir $P(x)$ und $Q(x)$ durch den Koeffizienten C von $Q(x)$ teilen, wird $C = 1$.

2. Polynomdivision. Wir beschreiben zuerst die Zerlegung von $\frac{P(x)}{Q(x)}$ und die Berechnung der Summanden. Lemma 8.13 zeigt dann, dass die Zerlegung immer möglich ist.

Wenn der Grad des Zählers $P(x)$ nicht kleiner ist als der Grad des Nenners, dann subtrahieren wir von $P(x)$ der Reihe nach das Produkt von solchen Monomen $S_l x^l$ mit $Q(x)$, so dass sich jeweils der Grad der Differenz um Eins erniedrigt. Damit können wir solange fortfahren, bis der Grad der Differenz niedriger ist als der von $Q(x)$. Dann haben wir das Polynom $S(x)$ und ein Polynom $R(x)$ bestimmt, dessen Grad kleiner ist als der von $Q(x)$, so dass $P(x) - S(x)Q(x) = R(x)$ bzw. $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ gilt. Weil im Grenzwert $|x| \rightarrow \infty$ alle anderen Summanden in Lemma 8.13 und $\frac{R(x)}{Q(x)}$ verschwinden, stimmt dieses Polynom $S(x)$ tatsächlich mit dem aus Lemma 8.13 überein.

Danach bestimmen wir die Koeffizienten a_{jl}, b_{jl} und c_{ik} mit dem Ansatz

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_{k=1}^{k_i} \frac{c_{ik}}{(x - x_i)^k} + \sum_j \sum_{l=1}^{l_j} \frac{a_{jl}x + b_{jl}}{(x^2 + p_j x + q_j)^l}$$

Wenn wir beide Seiten mit $Q(x)$ multiplizieren, erhalten wir eine Gleichung zwischen 2 reellen Polynomen. Durch Einsetzen von geeigneten Werten von x (Nullstellen von $Q(x)$) und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Zahlen a_{jl}, b_{jl} und c_{ik} .

Lemma 8.13. (i) Eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit komplexen Koeffizienten läßt sich schreiben als eine Summe eines komplexen Polynoms $S(x)$ und Summanden von der Form $\frac{c_{ik}}{(x - x_i)^k}$, wobei $(x - x_i)^k$ Teiler von $Q(x)$ sind und $c_{ik} \in \mathbb{C}$.

(ii) Eine reelle rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ läßt sich schreiben als eine Summe eines reellen Polynoms $S(x)$ und Summanden von der Form $\frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$ und $\frac{a_{jl}x+b_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}$, wobei $(x-x_i)^k$ und $(x^2+p_jx+q_j)^l$ reelle Teiler von $Q(x)$ sind mit $a_{jl}, b_{jl}, c_{ik} \in \mathbb{R}$.

Beweis: (i) Sei x_i eine k -fache Nullstelle vom Nennerpolynom $Q(x)$, d.h. $Q(x) = (x-x_i)^k q(x)$ mit $q(x_i) \neq 0$. Dann hat $P(x) - \frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x)$ bei $x = x_i$ eine Nullstelle. Deshalb gibt es ein $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $P(x) = \frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x) + (x-x_i)p(x)$. Es folgt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)}q(x) + (x-x_i)p(x)}{(x-x_i)^l q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)}}{(x-x_i)^l} + \frac{p(x)}{(x-x_i)^{l-1}q(x)}.$$

Der Grad des Nenners von dem zweiten Summanden ist dabei um Eins kleiner als der Grad von $Q(x)$. Indem wir diese Formel mehrfach bei allen Nullstellen von $Q(x)$ auf diesen Rest anwenden erhalten wir als letzten Summanden ein Polynom $S(x)$.

(ii) Für reelle Nullstellen x_i von $Q(x)$ sind die Koeffizienten in (i) reell. Deshalb genügt es ein analoges Vorgehen für Teiler $Q(x) = (x^2+p_jx+q_j)^l q(x)$ von $Q(x)$ anzugeben, wobei $q(x)$ an den komplexen Nullstellen $x_{1,2} = \frac{-p_j \pm \sqrt{p_j^2 - 4q_j}}{2}$ von $x^2+p_jx+q_j$ nicht verschwindet. Dort verschwindet $P(x) - (ax+b)q(x)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \frac{P(x_1)}{q(x_1)} &= ax_1 + b & \frac{P(x_2)}{q(x_2)} &= ax_2 + b \\ a &= \frac{1}{x_1-x_2} \left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)} - \frac{P(x_2)}{q(x_2)} \right) & b &= \frac{1}{x_1-x_2} \left(x_1 \frac{P(x_2)}{q(x_2)} - x_2 \frac{P(x_1)}{q(x_1)} \right) \end{aligned}$$

gilt. Weil $P(x)$ und $q(x)$ reelle Koeffizienten haben, gilt $\overline{P(x)} = P(\bar{x})$ und $\overline{q(x)} = q(\bar{x})$. Dann folgt $\overline{\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right)} = \frac{P(x_2)}{q(x_2)}$ aus $\bar{x}_1 = x_2$. Deshalb sind a und b reell mit

$$a = \frac{2}{\sqrt{4q_j-p_j^2}} \Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) \quad b = \Re\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) + \frac{p_j}{\sqrt{4q_j-p_j^2}} \Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right).$$

Wieder gibt es ein $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $P(x) = (ax+b)q(x) + (x^2+p_jx+q_j)p(x)$ und

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax+b}{(x^2+p_jx+q_j)^l} + \frac{p(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{l-1}q(x)}.$$

Nach mehrmaligem Anwenden erhalten wir als Rest ein reelles Polynom $S(x)$. **q.e.d.**

3. Termweise Integration.

$$\int \frac{dx}{(x-x_i)^k} = \begin{cases} \ln|x-x_i| + C & \text{für } k=1 \\ \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^l} = \begin{cases} \frac{a}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} + C & \text{für } l=1 \\ \frac{-a}{2(l-1)(x^2+px+q)^{l-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C & l=1 \\ \frac{2x+p}{(l-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{l-1}} + \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{l-1}} + C & l \neq 1. \end{cases}$$

Beispiel 8.14. $\int f(x)dx$ mit $f(x) = \frac{2x^5+x^4+x^2+2x-2}{x^4-1}$.

1. *Faktorisierung des Nenners.* $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

2. *Polynomdivision.*

$$\begin{aligned} 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x - 2 &= (2x + 1)(x^4 - 1) + x^2 + 4x - 1 \\ &\quad - 2x(x^4 - 1) \\ &= x^4 + x^2 + 4x - 2 \\ &\quad - (x^4 - 1) \\ &= x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 1 = c_1(x + 1)(x^2 + 1) + c_2(x - 1)(x^2 + 1) + (ax + b)(x - 1)(x + 1)$$

Einsetzen von $x = 1$ und $x = -1$ ergibt $4 = 4c_1$ und $-4 = -4c_2$ also $c_1 = 1$ und $c_2 = 1$.

Koeffizientenvergleich von x^3 und x^0 ergibt $0 = c_1 + c_2 + a$ und $-1 = c_1 - c_2 - b$. Dann folgt $a = -2$, $b = 1$ und $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2x+1}{x^2+1}$.

3. *Termweise Integration.*

$$\int f(x)dx = x^2 + x + \ln|x - 1| + \ln|x + 1| - \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + C.$$

8.3 Riemannintegrale Funktionen

In diesem Abschnitt erweitern wir das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen. Dabei machen wir wesentlichen Gebrauch von der Monotonie des Integrals von reellen Treppenfunktionen: für Treppenfunktionen $f \leq g$ in $B([a, b], \mathbb{R})$ gilt $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$.

Definition 8.15 (Unterintegral und Oberintegral). Für $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ heißt

$$\begin{aligned} \underline{\int} f &= \sup \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g \text{ Treppenfunktion mit } g \leq f \right\} && \text{Unterintegral von } f \text{ und} \\ \overline{\int} f &= \inf \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g \text{ Treppenfunktion mit } g \geq f \right\} && \text{Oberintegral von } f. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$. Unserer Zugang zum Riemannintegral über Treppenfunktionen weicht von dem Standardzugang etwas ab, beschreibt aber die gleichen Funktionen.

Definition 8.16 (Riemannintegral). Eine Funktion $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ heißt *riemannintegrel*, wenn $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ gilt. Diese Zahl heißt *Riemannintegral* $\int_a^b f dx$ von f über $[a, b]$. Die Menge aller riemannintegrelen Funktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a, b]$. Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ definieren wir $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse liegt offenbar in dem Intervall $[\underline{\int} f, \overline{\int} f]$ und ist für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ das Riemannintegral $\int_a^b f(x)dx$.

Definition 8.17 (Partition). *Eine Partition p von $[a, b]$ ist eine Zerlegung von $[a, b]$ in eine endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Teilintervallen $[a, b] = I_1 \cup \dots \cup I_n$. Die Feinheit $\|p\|$ der Partition p ist das Maximum der Intervalllängen. Die Menge aller Partitionen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}[a, b]$.*

Für jede Partition $p \in \mathcal{P}[a, b]$ bilden die Linearkombinationen von $\chi_{I_1}, \dots, \chi_{I_n}$ einen endlichdimensionalen Teilraum von $B([a, b], \mathbb{R})$. Für $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ enthält dieser Teilraum ein kleinstes Element g mit $g \geq f$ und ein größtes Element h mit $h \leq f$:

$$g = \sum_i \sup_{x \in I_i} f(x) \chi_{I_i} \qquad h = \sum_i \inf_{x \in I_i} f(x) \chi_{I_i}$$

Ihre Integrale heißen Obersummen $S(f, p) = \int_a^b g dx$ und Untersummen $s(f, p) = \int_a^b h dx$.

Definition 8.18 (Verfeinerung). *$p' \in \mathcal{P}[a, b]$ heißt Verfeinerung von $p \in \mathcal{P}[a, b]$, wenn alle Intervalle von p' in einem Intervall von p enthalten sind. Wir schreiben dann $p' \subset p$. Für $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}[a, b]$ besteht die gemeinsame Verfeinerung $p_1 \cap \dots \cap p_n \in \mathcal{P}[a, b]$ aus allen nichtleeren Schnittmengen $I_1 \cap \dots \cap I_n$ von Intervallen $I_1 \in p_1, \dots, I_n \in p_n$.*

Lemma 8.19. (i) *Wenn $p' \subset p$ gilt $s(p, f) \leq s(p', f)$ und $S(p', f) \leq S(p, f)$.*

(ii) *Für $p, p' \in \mathcal{P}[a, b]$ gilt $s(p, f) \leq S(p', f)$.*

Beweis:(i) Die den Partitionen p und p' entsprechenden Treppenfunktionen erfüllen mit $h \leq f \leq g$ und $h' \leq f \leq g'$ auch $h \leq g'$ und für $p' \subset p$ sogar $h \leq h' \leq f \leq g' \leq g$. Dann folgen (i) und (ii) aus der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen. **q.e.d.**

8.4 Kriterien von Darboux und Riemann

Satz 8.20 (Kriterium von Darboux). *Eine Funktion $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ ist genau dann riemannintegabel, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a, b]$ gibt mit $S(p, f) - s(p, f) < \epsilon$.*

Beweis: Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $\epsilon > 0$ gibt es $p', p'' \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $S(p'', f) - s(p', f) < \epsilon$. Für $p = p' \cap p''$ folgt $S(p, f) - s(p, f) \leq S(p'', f) - s(p', f) < \epsilon$ aus Lemma 8.19 (i).

Wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b]$ gibt mit $S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon$ dann ist $0 \leq \overline{\int} f - \underline{\int} f \leq S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) \leq \inf_{\epsilon > 0} \epsilon = 0$. Also gilt dann auch $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. **q.e.d.**

Beispiel 8.21. (i) *Für eine Regelfunktion f und eine Treppenfunktion g folgt $g - \epsilon \leq f \leq g + \epsilon$ aus $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$. Die entsprechende Partition $p \in \mathcal{P}[a, b]$ erfüllt $S(p, f) - s(p, f) \leq \int_a^b (g + \epsilon) dx - \int_a^b (g - \epsilon) dx \leq 2\epsilon(b - a)$. Also sind alle Regelfunktionen riemannintegabel.*

(ii) *Die Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{I_n}$ mit $I_n = (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$ ist auf $[0, 1]$ riemannintegabel, aber keine Regelfunktion, weil sie bei $x = 0$ nicht die Bedingung (i) in Satz 8.3 erfüllt.*

(iii) Für $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [a, b] \text{ und } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist auf allen Teilintervalle $I \subset [a, b]$ mit positiver Intervalllänge $\sup_{x \in I} f(x) = 1$ und $\inf_{x \in I} f(x) = 0$. Also ist $\underline{\int} f = 0$ und $\overline{\int} f = b - a$ und $f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

Definition 8.22 (Riemannsummen). Für $p \in \mathcal{P}[a, b]$ und Zwischenpunkte $\xi \in I_1 \times \dots \times I_n$ heißt $R(p, f, \xi) = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \chi_{I_i} dx$ Riemannsumme von f bezüglich p und ξ .

Aus der Definition von $s(p, f)$ und $S(p, f)$ folgt für $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ und $p \in \mathcal{P}[a, b]$ $\inf\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} = s(p, f)$ $\sup\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} = S(p, f)$.

Satz 8.23 (Kriterium von Riemann). $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ ist genau dann riemannintegabel, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|R(p, f, \xi) - A| < \epsilon$ für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $\|p\| < \delta$ und Zwischenpunkte ξ gilt. Dann gilt $A = \int_a^b f(x) dx$.

Beweis: Für jede Funktion $f \in B([a, b], \mathbb{R})$, die das Kriterium von Riemann erfüllt, gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Partition $p \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $S(p, f) - s(p, f) =$

$$= \sup\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} - \inf\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} \leq 2\epsilon.$$

Dann ist das Kriterium von Darboux erfüllt. Erfülle umgekehrt $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ das Kriterium von Darboux. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a, b]$, so dass $S(p, f) - s(p, f) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Seien I_1, \dots, I_n die Teilintervalle von p mit positiven Intervalllängen $|I_1|, \dots, |I_n|$, und $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{8n\|f\|_\infty + 1}, |I_1|, \dots, |I_n|\}$. Jedes Teilintervall einer Partition $p' \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $\|p'\| < \delta$ ist entweder in einem Teilintervall von p enthalten, oder enthält Punkte am linken oder rechten Rand eines der Intervalle I_1, \dots, I_n . Also sind höchstens $2n$ Teilintervalle von p' nicht in einem Teilintervall von p enthalten. Es folgt

$$S(p', f) - s(p', f) \leq S(p, f) - s(p, f) + 2\|f\|_\infty \cdot 2n \cdot \delta < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Für alle Zwischenpunkte ξ von p' gilt $s(p', f) \leq R(p', f, \xi), \int_a^b f(x) dx \leq S(p', f)$. Es folgt

$$\left| R(p', f, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq S(p', f) - s(p', f) < \epsilon. \quad \text{q.e.d.}$$

Stimmen von zwei Partitionen $p, p' \in \mathcal{P}[a, b]$ die Inneren der Intervalle überein, so gilt $R(p, f, \xi) = R(p', f, \xi)$ für gleiche Zwischenpunkte ξ . Deshalb ist unser Zugang zum Riemannintegral äquivalent zum Standardzugang.

Korollar 8.24. Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i-t}{n}(b-a)\right).$$

Beweis: Für die Partitionen $p_n = \{[a, a + \frac{1}{n}(b-a)), [a + \frac{1}{n}(b-a), a + \frac{2}{n}(b-a)), \dots, [a + \frac{n-1}{n}(b-a), b]\}$ bzw. $p_n = \{[a, a + \frac{1}{n}(b-a)], (a + \frac{1}{n}(b-a), a + \frac{2}{n}(b-a)), \dots, (a + \frac{n-1}{n}(b-a), b)\}$ in $\mathcal{P}[a, b]$ mit den Zwischenpunkten $\xi_i = a + \frac{i-1}{n}(b-a)$ für $i = 1, \dots, n$ ist $\|p_n\| = \frac{b-a}{n}$. Die Aussage folgt aus dem Kriterium von Riemann. **q.e.d.**

Korollar 8.25*: Seien $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Wenn f und g auf einer dichten Teilmenge von $[a, b]$ (z.B. $\mathbb{Q} \cap [a, b]$) übereinstimmen, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Beweis*: Weil jedes Teilintervall von positiver Intervalllänge einer beliebigen Partition $p \in \mathcal{P}[a, b]$ immer Elemente einer dichten Teilmenge von $[a, b]$ enthält, können die Zwischenpunkte immer aus einer dichten Teilmenge gewählt werden. **q.e.d.**

Satz 8.26 (Eigenschaften des Riemannintegrals).

- (i) $\mathcal{R}[a, b]$ ist eine Unteralgebra von $B([a, b], \mathbb{R})$ die die Regelfunktionen und $C([a, b])$ enthält. Die Abbildung $\mathcal{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f dx$ ist \mathbb{R} -linear.
- (ii) $\mathcal{R}[a, b]$ enthält die monotonen Funktionen, und mit $f \in \mathcal{R}[a, b]$ auch $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.
- (iii) Monotonie: Für $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ folgt aus $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$) $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$. Insbesondere gilt $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx \leq (b-a)\|f\|_\infty$.
- (iv) Normierung: $\int_a^b 1 dx = b - a$.
- (v) Stetigkeit: $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $g \in C(\mathbb{R})$, dann ist $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.
- (vi) Intervall Additivität: Für jedes $c \in (a, b)$ gilt:

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \in \mathcal{R}[a, c] \cap \mathcal{R}[c, b] \text{ und } \int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

- (vii) Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann konvergiert $(\int_{a_n}^{b_n} f dx)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f dx$.
- (viii) Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit des Riemannintegrals: Der Grenzwert f einer gleichmäßig konvergenten Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}[a, b]$ liegt auch in $\mathcal{R}[a, b]$ und die Folge $(\int_a^b f_n dx)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen $\int_a^b f dx$.

Beweis:(i) Für $f, g \in B([a, b], \mathbb{R})$ und $p \in [a, b]$ gilt

$$S(p, f + g) \leq S(p, f) + S(p, g) \text{ und } -s(p, f + g) \leq -s(p, f) - s(p, g)$$

Daraus und aus $f(x)g(x) - f(y)g(y) = g(x)(f(x) - f(y)) + f(y)(g(x) - g(y))$ folgt

$$\begin{aligned} S(p, f + g) - s(p, f + g) &\leq S(p, f) - s(p, f) + S(p, g) - s(p, g) \\ S(p, fg) - s(p, fg) &\leq \|g\|_\infty(S(p, f) - s(p, f)) + \|f\|_\infty(S(p, g) - s(p, g)) \end{aligned}$$

Aus $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ folgt also wegen dem Darbouxkriterium $f + g, fg \in \mathcal{R}[a, b]$. Wegen Beispiel 8.21 (i) ist jede Regelfunktion riemannintegrierbar und damit wegen Satz 8.3 auch jede stetige Funktion. Die Linearität des Riemannintegrals folgt aus der Linearität des Integrals von Treppenfunktionen.

(ii) Für $p \in \mathcal{P}[a, b]$ seien $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ die entsprechenden Teilintervallendpunkte. Für monoton steigende f folgt aus $\|p\| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$

$$S(p, f) - s(p, f) \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \|p\| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) < \epsilon.$$

Das Kriterium von Darboux zeigt $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Analoges gilt für monoton fallende f .

Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ seien $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ und $f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$. Dann folgt $0 \leq \sup\{f^\pm(x) \mid x \in I_i\} - \inf\{f^\pm(x) \mid x \in I_i\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in I_i\} - \inf\{f(x) \mid x \in I_i\}$.

Also gilt $S(p, f^\pm) - s(p, f^\pm) \leq S(p, f) - s(p, f)$ für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$. Dann folgt $f^\pm \in \mathcal{R}[a, b]$ und damit auch $|f| = f^+ - f^- \in \mathcal{R}[a, b]$ aus dem Kriterium von Darboux.

(iii) Aus $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ mit $f \leq g$ folgt $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int} f \leq \underline{\int} g = \int_a^b g(x)dx$.

(iv) Für $f = 1$ (konstant) gilt $S(p, 1) = s(p, 1) = b - a$ für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$.

(v) Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $g \in C(\mathbb{R})$. Dann ist g auf $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ gleichmäßig stetig. Also gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ aus $|x - x'| < \delta$ mit $x, x' \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ folgt. Sei $\|g\|_\infty = \max\{|g(x)| \mid x \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]\}$. Wegen dem Darbouxkriterium gibt es für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ein $p \in \mathcal{P}[a, b]$ mit $S(p, f) - s(p, f) < \frac{\epsilon \delta}{4\|g\|_\infty}$.

Wir zerlegen die Summe $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f)$ in die Summe über Teilintervalle I_i , auf denen $\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) < \delta$ gilt, und die Summe über Teilintervalle I_j , auf denen $\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \geq \delta$ gilt. Aus der Wahl von δ folgt, dass die erste Summe nicht größer ist als $\frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$. Weil die Summe der Teilintervalllängen in der zweiten Summe nicht größer ist als $\frac{S(p, f) - s(p, f)}{\delta}$, ist die zweite Summe nicht größer als $(S(p, f) - s(p, f)) \frac{2\|g\|_\infty}{\delta} < \frac{\epsilon}{2}$. Also gilt $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f) < \epsilon$ und $g \circ f$ erfüllt das Darbouxkriterium.

(vi) Für jedes $p \in \mathcal{P}[a, b]$ entspricht die Verfeinerung $p \cap \{[a, c], [c, b]\} \in \mathcal{P}[a, b]$ einem Paar von Partitionen in $\mathcal{P}[a, c] \times \mathcal{P}[c, b]$. Dann folgt (v) aus dem Darbouxkriterium.

(vii) Wegen (vi) und (iii) gilt $|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq (a_n - a + b - b_n)\|f\|_\infty$.

(viii) Für $p \in \mathcal{P}[a, b]$ folgt mit $f = (f - f_n) + f_n$ aus dem Beweis von (i)

$$\begin{aligned} S(p, f) - s(p, f) &\leq S(p, f - f_n) - s(p, f - f_n) + S(p, f_n) - s(p, f_n) \\ &\leq 2(b-a)\|f - f_n\|_\infty + S(p, f_n) - s(p, f_n). \end{aligned}$$

Für $\epsilon > 0$ wählen wir zuerst n so groß, dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ gilt, und dann $p \in \mathcal{P}[a, b]$ so dass $S(p, f_n) - s(p, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Dann erfüllt f das Kriterium von Darboux.

Andererseits folgt für $f, f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ aus der Monotonie $|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty$. Also konvergiert $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f(x)dx$. **q.e.d.**

8.5 Differentiation und Integration

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 8.27. Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und F eine stetige Funktion auf $[a, b]$, die auf (a, b) differenzierbar ist mit $F' = f$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Umgekehrt ist $F(y) = \int_a^y f(x)dx$ für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\|f\|_\infty$ und bei den $x \in (a, b)$ differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$, bei denen f stetig ist.

Beweis: Für alle $p \in \mathcal{P}[a, b]$ enthält wegen dem Mittelwertsatz jedes Teilintervall mit Abschluss $[x_{i-1}, x_i]$ einen Zwischenpunkt ξ_i mit $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ und $R(p, f, \xi) = F(b) - F(a)$. Aus dem Kriterium von Riemann folgt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Die zweite Aussage folgt wie im Satz 8.3 (iv) aus Satz 8.26 (iii). **q.e.d.**

Beispiel 8.28. (i) Sei $1 < \alpha < 2$ und $F(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Dann ist F für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit

$$F'(x) = \alpha \frac{|x|^\alpha}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{|x|^\alpha}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wegen $\frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{|x|^\alpha}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist F auch bei $x = 0$ differenzierbar und dort gilt $F'(0) = 0$. Also gibt es differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen auf einer kompakten Teilmenge nicht beschränkt, und die nicht riemannintegabel sind.

(ii) Sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ Dann ist f auf allen kompakten Intervallen riemannintegabel. Offenbar gilt $F(x) = \int_0^x f(t)dt = |x|$. Also sind nicht alle Integrale von riemannintegablen Funktionen differenzierbar.

Satz 8.29 (Restglied der Taylorformel in Integralform). Sei $f \in C([a, b])$ auf (a, b) $(n + 1)$ -mal differenzierbar mit auf $[a, b]$ stetig fortsetzbaren Ableitungen $f', \dots, f^{(n)}$ und $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann gilt für alle $x_0, x \in [a, b]$

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

Beweis: Wir definieren $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$ für $x, t \in [a, b]$. Dann ist g auf (a, b) differenzierbar mit $g' \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt wie im Beweis von Satz 7.37

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x g'(t)dt = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Satz 8.30 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)*: $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

gilt für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $\frac{1}{b-a} \int_a^b f dx = f(x_0)$ für $f \in C([a, b])$ mit einem $x_0 \in (a, b)$.

Beweis:* Wegen $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq f \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ folgt die erste Aussage aus der Monotonie. Wenn f stetig ist folgt für $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ aus dem Mittelwertsatz $f(x_0) = F'(x_0) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ mit $x_0 \in (a, b)$. **q.e.d.**

8.6 Uneigentliches Integral

Wir erweitern das Riemannintegral auf offene und unbeschränkte Intervalle.

Definition 8.31. Eine Funktion f heißt *uneigentlich riemannintegabel* auf dem offenen (nicht notwendigerweise beschränkten) Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, wenn f auf allen kompakten Teilintervallen riemannintegabel ist, und wenn für ein $c \in (a, b)$ beide Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t) dt$ und $\lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f(t) dt$ existieren.

Beispiel 8.32. (i) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx. \quad \int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$

Also existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty-} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$ nur für $\alpha > 1$ mit $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx. \quad \int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$

Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dx$ genau dann, wenn $\alpha < 1$ mit $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$. Wegen (i) folgt dann, dass $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ für kein α existiert.

(iii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx. \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C.$

Also folgt $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ aus $\lim_{x \rightarrow -\infty+} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty-} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

Verschiedene Kriterien helfen zu entscheiden, ob diese Grenzwerte existieren. Hier einige Kriterien für uneigentliche Integrale $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$.

Cauchy Kriterium: $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass für alle $a < c < d < e < b$ gilt $|\int_d^e f(x) dx| < \epsilon$.

Monotoniekriterium: Wenn $f \geq 0$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$ genau dann, wenn $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ auf $x \in (a, b)$ beschränkt ist.

Majorantenkriterium: Wenn $f \geq 0$ und $f \leq g$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$, wenn $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x g(t) dt$ existiert.

Definition 8.33. Eine Funktion f auf einem offenen (unbeschränkten) Intervall heißt absolut riemannintegabel, wenn $|f|$ riemannintegabel ist.

Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Alle absolut riemannintegablen Funktionen sind also auch riemannintegabel.

Satz 8.34 (Integralkriterium für Reihen). Für monoton fallendes $f : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ist $(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente monoton fallende Folge positiver Zahlen. Für alle $m < n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n) + \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq f(m) + \int_m^n f(x) dx.$$

Die Reihe $(\sum f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x) dx < \infty$. Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x) dx.$$

Beweis: Für $m < n \in \mathbb{N}$ sei $p_{m,n} \in \mathcal{P}[m, n]$ die Partition $[m, m+1) \cup \dots \cup [n-1, n]$. Dann ist offenbar $\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq s(p_{m,n}, f)$ und $S(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$. Also gilt

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

Für $n = m + 1$ folgt aus der linken Ungleichung $f(m+1) - \int_m^{m+1} f(x) dx \leq 0$, und damit das monotone Fallen der Folge $(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$. Für $m = 1$ folgt aus der rechten Ungleichung, dass diese Folge nach unten durch $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also positiv ist. Dann konvergiert diese Folge wegen dem Monotonieprinzip. Aus beiden Ungleichungen folgt auch die zweite Aussage. Setzen wir in der zweiten Aussage $m = 1$ und betrachten den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ dann folgt die dritte Aussage aus dem Monotonieprinzip und dem Majorantenkriterium. **q.e.d.**

Beispiel 8.35. (i) Der Grenzwert $(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Riemannsche ζ -Funktion und ist genau dann konvergent, wenn $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$ existiert. Also für $s > 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

(ii) Die Folge $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ ist eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Der Grenzwert $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}) - \ln(n)$ wird Eulersche Konstante genannt. Bis heute ist nicht bekannt, ob er rational oder irrational ist.

(iii) Wegen (i) ist die Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $s \in (1, \infty)$ konvergent. Die Folge

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \int_1^n \frac{dx}{x^s}$$

ist wegen dem vorangehenden Satz auf $s \in (0, \infty)$ eine monoton fallende Folge von Funktionen. Weil die folgende Formel auch für $s = 1$ gilt

$$\int_1^n \frac{dx}{x^s} = \frac{n^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{\exp((1-s) \ln n) - 1}{1-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(n))^k (1-s)^{k-1}}{k!},$$

ist das eine Folge von stetigen Funktionen auf $s \in \mathbb{R}$. Wegen der rechten Ungleichung der zweiten Aussage von Satz 8.34, Satz 5.27 und weil $s \mapsto m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ auf $s \in (0, \infty)$ monoton fallend ist, konvergiert sie für alle $\epsilon > 0$ auf $[\epsilon, \infty)$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Auf $s \in (1, \infty)$ ist wegen (i) der Grenzwert gleich

$$\zeta(s) - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Also ist $\lim_{s \rightarrow 1+} (\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) = \gamma$, weil für $s = 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma.$$

(iv) $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+1) \ln^s(n+1)} \right) < \infty \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^s(x)} dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{x^s} dx < \infty \iff s > 1.$

(v) Nach Euler ist die Γ -Funktion definiert durch
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Dieses Integral ist an beiden Grenzen uneigentlich. Wir zerlegen es in $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$. Auf $t \in (0, 1]$ ist der Integrand beschränkt durch $e^{-1} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$. Deshalb konvergiert das erste Integral für $x - 1 > -1 \iff x > 0$. Wegen $e^{-t} t^{x-1} = \exp(-t + (x-1) \ln(t))$ und weil für alle $\epsilon > 0$ im Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty}$ der Ausdruck $-\epsilon t + (x-1) \ln(t)$ negativ ist, konvergiert das zweite Integral für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\Gamma(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$ definiert. Durch eine partielle Integration erhalten wir

$$\int_{\epsilon}^R e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_{t=\epsilon}^{t=R} + x \int_{\epsilon}^R e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ erhalten wir folgende Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Mit $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ folgt induktiv $\Gamma(n) = (n-1)!$.

8.7 Die Konvergenz von Taylorreihen

Satz 8.36 (Abelscher Grenzwertsatz). *Wenn die Potenzreihe $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n)$ für ein $x \in \mathbb{K}$ konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihenfunktion $t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n (tx)^n$ auf $t \in [0, 1]$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von $[0, 1]$ nach \mathbb{K} .*

Beweis: Indem wir a_n durch $a_n x^n$ ersetzen können wir x weglassen. Zur Abkürzung setzen wir $S_{m,k} = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$. Wegen dem Cauchy Kriterium für Reihen gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|S_{m,k}| < \epsilon$ für alle $m \geq N$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^n &= S_{m,1} t^{m+1} + (S_{m,2} - S_{m,1}) t^{m+2} + \dots + (S_{m,k} - S_{m,k-1}) t^{m+k} \\ &= S_{m,1} (t^{m+1} - t^{m+2}) + S_{m,2} (t^{m+2} - t^{m+3}) + \dots + S_{m,k-1} (t^{m+k-1} - t^{m+k}) + S_{m,k} t^{m+k}. \end{aligned}$$

Für $t \in [0, 1]$ sind die hinteren Faktoren $t^{m+1} - t^{m+2}, t^{m+2} - t^{m+3}, \dots, t^{m+k-1} - t^{m+k}, t^{m+k}$ alle nicht negativ und ihre Summe gleich $t^{m+1} \leq 1$. Aus $|S_{m,k}| < \epsilon$ folgt also

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^n \right| < \epsilon (t^{m+1} - t^{m+2} + t^{m+2} - \dots - t^{m+k} + t^{m+k}) = \epsilon t^{m+1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Also konvergiert die Potenzreihe auf $t \in [0, 1]$ gleichmäßig, und damit wegen Satz 5.27 gegen eine stetige Funktion. **q.e.d.**

Beispiel 8.37. (i) Für alle $x_0 \in (0, \infty)$ hat $x \mapsto f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n x_0^n}$ im Konvergenzbereich $|x| < x_0$ die Ableitung $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x_0^{n+1}} = \frac{1}{x+x_0}$. Also stimmt sie mit

$f(x) = \ln(x+x_0) - \ln(x_0)$ überein. Deshalb sind sowohl \ln also auch \log_a auf $(0, \infty)$ reellanalytisch. Insbesondere folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

(ii) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in (0, \infty)$ ($x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $\alpha \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0)$) hat

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n \quad \text{mit} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

wegen dem Quotiententest den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha-n|}{|x_0|^{(n+1)}}} = |x_0|$. Die

Ableitung ist $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x_0^{\alpha-n} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n$. Wegen

$$\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} (\alpha-n+n) = \binom{\alpha}{n}$$

ist $(x_0 + x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n$. Dann erfüllt f die Differentialgleichung $(x_0 + x)f' = \alpha f$ mit $f(0) = x_0^\alpha$. Also verschwindet die Ableitung von

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x_0 + x)^\alpha} \quad g'(x) = \frac{(x + x_0)f'(x) - \alpha f(x)}{(x + x_0)^{\alpha+1}} = 0 \quad \text{mit } g(0) = 1.$$

Dann folgt aus Satz 7.15 (i), dass $f(x) = (x + x_0)^\alpha$ für alle $|x| < x_0$ gilt. Also sind für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen $x \mapsto x^\alpha$ auf $(0, \infty)$ und für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ reellanalytisch.

(iii) Die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind wegen (ii) im Inneren ihrer Definitionsbereiche reellanalytisch. Für alle $|x| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} & \arccos'(x) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} \\ \arctan'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} & \operatorname{arccot}'(x) &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 7.4 (v) sind sie selber dann auch reellanalytisch. Für alle $|x| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} & \arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\ \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} & \operatorname{arccot}(x) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt $x \geq \ln(1+x)$ für $x > -1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \ln \left((-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \right) &= \ln \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = \ln \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \leq -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1} \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} \right) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Dann konvergieren aber die ersten beiden Potenzreihen auch für $x = \pm 1$ und die letzten beiden wegen der alternierenden Reihe von Leibniz. Wegen dem Abelschen Grenzwertsatz gelten die obigen Gleichungen dann auch für $x = \pm 1$. Insbesondere ist

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Satz 8.38. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C^1((a, b))$ eines beschränkten Intervalles (a, b) , die für ein $x_0 \in (a, b)$ punktweise konvergiert. Wenn die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ außerdem gleichmäßig gegen g konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C^1((a, b))$ und es gilt $f' = g$.

Beweis*: Wegen dem Mittelwertsatz gilt für alle $x, x_0 \in (a, b)$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0| \sup\{|f'_n(y) - f'_m(y)| \mid y \in (a, b)\}.$$

Wegen Satz 5.27 konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C((a, b))$. Wegen dem Mittelwertsatz gibt es für alle $x \neq x_1 \in (a, b)$ eine Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (x, x_1) bzw. (x_1, x) , so dass $f_n(x) - f_n(x_1) = (x - x_1)f'_n(\xi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen dem Auswahlprinzipien von Bolzano-Weierstraß konvergiert eine Teilfolge von $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\xi \in [x, x_1]$ bzw. $\xi \in [x_1, x]$. Weil g wegen Satz 5.27 stetig ist und wegen

$$|f'_n(\xi_n) - g(\xi)| \leq |f'_n(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(\xi)|,$$

konvergiert die entsprechende Teilfolge von $(f'_n(\xi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $g(\xi)$. Also konvergiert $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x) = f(x_1) + (x - x_1)g(\xi)$. Aus der Stetigkeit von g folgt, dass f bei x_1 differenzierbar ist und $g(x_1)$ die Ableitung $f'(x_1)$ ist. **q.e.d.**

Korollar 8.39*: Sei $(\sum f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Reihe in $C((a, b))$ auf dem beschränkten Intervall (a, b) und $(\sum f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $x_0 \in (a, b)$. Dann konvergiert $(\sum f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \in C^1((a, b))$ und $(\sum f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f' . **q.e.d.**

Satz 8.40 (Satz von Borel). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine beliebige Folge in \mathbb{R} . Dann gibt es eine Funktion, deren Taylorreihe bei $x_0 = 0$ gleich $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ ist, und die außerhalb von $(-2, 2)$ verschwindet. D.h. alle Potenzreihen sind Taylorreihen einer solchen Funktion.

Beweis*:

$$\text{Sei } h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ \exp\left(\exp\left(\frac{-1}{|x|-1}\right) \cdot \frac{-1}{2-|x|}\right) & \text{für } 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{für } 2 \leq |x| \end{cases}$$

Dann ist $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine 'Hutfunktion', die außerhalb von $(-2, 2)$ verschwindet, und die auf $[-1, 1]$ gleich 1 ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Konstante $M_n > 0$

$$M_n = \max\{\|h_n\|_\infty, \|h'_n\|_\infty, \dots, \|h_n^{(n-1)}\|_\infty\}$$

mit $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n \cdot h(x)$. Dann sei für eine beliebige reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$C_n = |a_n| M_n + 1 \quad \text{und} \quad f_n(x) = \frac{a_n}{n! C_n^n} h_n(C_n \cdot x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $f_n^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ a_n & \text{für } m = n. \end{cases}$ Außerdem gilt

$$\|f_n^{(m)}\|_\infty = \frac{|a_n| C_n^m}{n! C_n^n} \|h_n^{(m)}\|_\infty \leq \frac{|a_n| M_n C_n^m}{n! C_n^n} < \frac{C_n^{m+1}}{n! C_n^n} \leq \frac{1}{n!} \quad \text{für alle } n > m \in \mathbb{N}_0.$$

Also konvergiert für alle $m \in \mathbb{N}_0$ $(\Sigma f_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig. Wegen Korollar 8.39 konvergieren also für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Reihen $(\Sigma f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\Sigma f_n')_{n \in \mathbb{N}_0}, \dots, (\Sigma f_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen $f, f', \dots, f^{(m)}$. Also ist der Grenzwert $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt $f^{(m)}(0) = a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Beispiel 8.41. (i)* Die Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$ ist auf ganz \mathbb{R} reellanalytisch und hat dort keine Nullstellen. Deshalb definiert $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ eine Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$. Die Ableitungen bei $x = 0$ heißen Bernoulli Zahlen $B_0 = f(0) = 1, B_1 = f'(0) = -\frac{1}{2}, \dots$. Dann hat f die Taylorreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$. Aus $(e^x - 1)f(x) = x$ folgt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} x^n = x.$$

Wegen Beispiel 7.43 (ii) ist f reellanalytisch, und es gilt die folgende Rekursionsformel

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0 \text{ also } B_n = -\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \text{ und } B_0 = 1.$$

Aus $f(x) - f(-x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{e^{-x} - 1} = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x e^x}{1 - e^x} = -x$ folgt $B_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii)* Wegen Beispiel 7.43 (ii) ist \tan reellanalytisch. Er hat bei $x_0 = 0$ die Taylorreihe

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = -i \frac{e^{2ix} + 1 - 2}{e^{2ix} + 1} = \frac{2i(e^{2ix} - 1)}{e^{4ix} - 1} - i = \frac{2i(e^{2ix} + 1) - 4i}{e^{4ix} - 1} - i = \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{2ix}{e^{2ix} - 1} + ix - \frac{4ix}{e^{4ix} - 1} - 2ix \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} - 4^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n-1}. \end{aligned}$$

(iv)* Wegen Beispiel 7.43 (ii) ist \cot reellanalytisch. Er hat bei $x_0 = 0$ die Taylorreihe

$$\begin{aligned} x \cot(x) &= ix \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = ix \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} = ix \frac{2 + e^{2ix} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} + ix = \\ &= 2ix B_1 + ix + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n}. \end{aligned}$$

Also folgt $\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n-1}$

(v)* Wir betrachten die Reihe $f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{x}{n^2 \left(\frac{x}{n} - 1 \right)}$.

Sie konvergiert für kleine $\epsilon > 0$ auf $x \in B(0, \frac{1}{\epsilon}) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B(n, |n|\epsilon)$ gleichmäßig mit

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{2}{n(x-n)} + \sum_{n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{x^2}{nm(x-n)(x-m)} \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{2}{n(x-n)} + \frac{(x-n)^2 + 2n(x-n) + n^2}{n^2(x-n)^2} \right) + \sum_{n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \neq m} \frac{x(x-m)n - x(x-n)m}{nm(x-n)(x-m)(n-m)} \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1-4}{n^2} + \left(\frac{2}{x-n} + \frac{2}{n} \right) \left(\frac{2}{n} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\}} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m-n} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(x-n)^2} - \frac{3}{n^2} \right) = -f'(x) - \alpha^2 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = 6 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Zuletzt haben wir Satz 8.38 benutzt. Durch Integration über dx folgt

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{f}{\alpha}\right) = - \int \frac{\frac{f'}{\alpha} dx}{\left(\frac{f}{\alpha}\right)^2 + 1} = -\alpha \int \frac{f' dx}{f^2 + \alpha^2} = \alpha \int dx = \alpha x + C.$$

Weil f Polstellen bei $x \in \mathbb{Z}$ hat folgt $C = 0$ und $\alpha = \pi$ und damit auch

$$f(x) = \pi \cot(\pi x) \quad \cot(x) = \frac{1}{\pi} f\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (\text{Partialbruchzerlegung von } \cot).$$

Durch mehrmaliges Anwenden von Satz 8.38 erhalten wir dann für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \cot(x) &= \frac{1}{\pi \frac{x}{\pi}} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\pi \left(\frac{x}{\pi} - n\right)} - \frac{1}{\pi n} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right). \\ \cot'(x) &= -\frac{1}{x^2} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{(x - \pi n)^2} + \frac{1}{(x + \pi n)^2} \right). \\ \vdots &= \quad \quad \quad \vdots \\ \cot^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{(-1)^k k!}{(x - \pi n)^{k+1}} + \frac{(-1)^k k!}{(x + \pi n)^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der in (iv) berechneten Taylorreihe bei $x_0 = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{2^2 (-1) B_2}{2!} = \frac{\pi^2}{6}, & \zeta(4) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^4} = -\frac{\pi^4}{2} \frac{2^4 B_4}{4!} = \frac{\pi^4}{90}, \\ \zeta(2k) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi^{2k}}{2} \frac{2^{2k} (-1)^k B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(vi)* Für eine Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert das Produkt $\prod_{n \in \mathbb{N}}(1 + a_n)$ wegen den Eigenschaften von \ln genau dann, wenn die Reihe $(\sum \ln(1 + a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Wegen (iv) und Satz 7.37 gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle x mit $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$\left| \ln(1 + x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \leq \frac{C_k}{(k+1)!} |x|^{k+1} \quad \text{mit} \quad C_k = \sup_{|x| \leq \frac{1}{2}} \frac{k!}{|1+x|^{k+1}} = 2^{k+1} k!.$$

Also konvergiert das Produkt $\prod_{n \in \mathbb{N}}(1 + a_n)$, wenn für ein $k \in \mathbb{N}_0$ die Reihen $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\sum a_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|^{k+1})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren.

Insbesondere konvergiert das Produkt $f(x) = x \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\frac{2x}{n^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \pi \cot(\pi x).$$

Also verschwindet die Ableitung von $\frac{\pi f(x)}{\sin(\pi x)}$ und wegen $f'(0) = 1 = \sin'(0)$ folgt

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}, \quad \sin(x) = \pi f\left(\frac{x}{\pi}\right) = x \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \quad (\text{Produktzerlegung von } \sin).$$

Für $x = \frac{1}{2}$ erhalten wir die sogenannte Formel von Wallis:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^{-1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}.$$