

Kapitel 6

Stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

6.1 Umkehrfunktionen

Satz 6.1 (Zwischenwertsatz). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ stetig. Dann enthält das Bild $f[[a, b]]$ das abgeschlossene Intervall $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$.*

Beweis: Für $f(a) = f(b)$ ist die Aussage trivial. Sei y eine reelle Zahl im offenen Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und $A = f^{-1}[(-\infty, y]]$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $A = f^{-1}[[y, \infty))$ für $f(a) > f(b)$. Diese Menge enthält a , ist beschränkt und wegen der Stetigkeit von f abgeschlossen. Also ist A kompakt und besitzt ein Maximum $x = \max A$ mit $f(x) \leq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \geq y$ für $f(a) > f(b)$. Weil y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, ist $x < b$ und für alle $z \in (x, b]$ liegt $f(z)$ auf der selben Seite von y wie $f(b)$. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $(x, b]$, die gegen x konvergiert. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ und $f(x) \geq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \leq y$ für $f(a) > f(b)$. Also ist $f(x) = y$ und das Bild von f enthält neben $f(a)$ und $f(b)$ alle reellen Zahlen zwischen $f(a)$ und $f(b)$. **q.e.d.**

Korollar 6.2. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f[I]$ ein Intervall.*

Beweis: Sei $J = f[I]$. Für $a < b$ und $a, b \in J$ folgt aus dem Zwischenwertsatz $[a, b] \subset J$. Dann enthält J alle reelle Zahlen, die weder eine untere noch eine obere Schranke von J sind. Jenachdem, ob J ein Minimum bzw. Maximum enthält ist dann J eines der Intervalle $(\inf J, \sup J)$, $[\min J, \sup J)$, $(\inf J, \max J]$ oder $[\min J, \max J]$. Dabei ist $\inf J = -\infty$ bzw. $\sup J = \infty$ wenn J keine untere bzw. obere Schranke hat. **q.e.d.**

Die Injektivität von solchen Funktionen ist äquivalent zur strengen Monotonie:

Definition 6.3 (Monotonie). *Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ auf einer Teilmenge X von \mathbb{R} heißt*

monoton wachsend, wenn $f(x) \leq f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt

streng monoton wachsend, wenn $f(x) < f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt.

monoton fallend, wenn $f(x) \geq f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt.

streng monoton fallend, wenn $f(x) > f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt.

Satz 6.4. Eine stetige reelle Funktion f auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Beweis: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall I stetig und injektiv. Offenbar ist f genau dann streng monoton (wachsend oder fallend), wenn für je drei verschiedenen Punkte $a < x < b$ in I entweder $f(a) < f(x) < f(b)$ oder $f(a) > f(x) > f(b)$ gilt, wenn also die offenen Intervalle zwischen $f(a)$ und $f(x)$ und zwischen $f(x)$ und $f(b)$ disjunkt sind. Wenn es andernfalls ein $x_0 \in (a, b) \subset I$ gibt, dessen Funktionswert $f(x_0)$ nicht zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass jeder Wert, der sowohl zwischen $f(x_0)$ und $f(a)$ als auch zwischen $f(x_0)$ und $f(b)$ liegt, einmal auf (a, x_0) und einmal auf (x_0, b) angenommen wird, was der Injektivität widerspricht.

Umgekehrt ist jede streng monotone Funktion injektiv. **q.e.d.**

Korollar 6.5. Sei f eine reelle, stetige und injektive Funktion auf einem Intervall I . Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f[I] \rightarrow I$ stetig.

Beweis: Jedes $x \in I$ besitzt eine Umgebung in I , die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakter Intervalle ist wegen dem vorangehenden Satz und Korollar 6.2 eine Umgebung von $f(x)$ in dem Intervall $f[I]$. Dann ist f^{-1} wegen Korollar 5.18 auf dieser Umgebung von $f(x)$ stetig. Also ist f^{-1} auf $f[I]$ stetig. **q.e.d.**

Beispiel 6.6. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^k$ streng monoton wachsend. Dann ist die Umkehrabbildung $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt für die Abbildung $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ mit Umkehrabbildung $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Für negative $\frac{p}{q}$ sind diese Abbildungen von \mathbb{R}^+ nach \mathbb{R}^+ streng monoton fallend.

Satz 6.7. Sei f eine monoton wachsende (fallende) Funktion von einem Intervall I nach \mathbb{R} . Dann ist die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f höchstens abzählbar.

Beweis*: Wir betrachten monoton wachsende Funktionen. Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Punkt ξ von I sei $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I \text{ und } x < \xi\}$ und $f(\xi_+) = \inf\{f(x) \mid x \in I \text{ und } \xi < x\}$. Wenn $f(\xi_-) = f(\xi_+)$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Punkte $x_-, x_+ \in I$ mit $x_- < \xi < x_+$ und

$$f(x_+) - \epsilon < f(\xi_+) = f(\xi_-) < f(x_-) + \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt $f(\xi_-) \leq f(\xi) \leq f(\xi_+)$. Dann gilt für alle $x \in [x_-, x_+]$ auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \leq f(x) - f(\xi) \leq f(x_+) - f(\xi_+) < \epsilon.$$

Also ist f bei solchen ξ stetig. Wenn f bei ξ stetig ist gilt $f(\xi_-) = f(\xi) = f(\xi_+)$. Die Unstetigkeitsstellen im Inneren von I bestehen also aus den ξ mit $f(\xi_-) < f(\xi_+)$. Wegen der Monotonie sind die offenen Intervalle $(f(\xi_-), f(\xi_+))$ paarweise disjunkt. Wir wählen in jedem eine rationale Zahl und erhalten eine injektive Abbildung von den Unstetigkeitsstellen im Inneren von I nach \mathbb{Q} . Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der rationalen Zahlen also höchstens abzählbar. **q.e.d.**

6.2 Die reellen Funktionen e^x , $\ln x$, a^x , $\log_a x$.

Satz 6.8 (Eigenschaften von \exp). (i) $e^0 = \exp(0) = 1$ und $e^1 = \exp(1) = e$.

(ii) $e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$.

(iii) Für $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $e^x < e^y$ aus $x < y$.

(iv) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ ist bijektiv.

Beweis: (i) und (ii) folgen aus der Definition.

(iii) Aus $x < y$ folgt $y - x > 0$. Dann gilt wegen (ii) $e^{y-x} > 1$. Wegen Satz 4.20 (i) und (ii) gilt dann $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$. Also folgt $e^x < e^y$.

(iv) Offenbar ist die Funktion wegen (iii) injektiv. Wegen $e > 1$ und Satz 3.4 gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ zwei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < y < e^m$. Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann y zum Bild von $[-n, m] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$. **q.e.d.**

Definition 6.9 (natürlicher Logarithmus). Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ heißt natürlicher Logarithmus: $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.

Wegen Korollar 6.5 ist der Logarithmus stetig.

Satz 6.10 (Eigenschaften von \ln). (i) $\ln(1) = 0$.

(ii) $\ln(e) = 1$.

(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(iv) $a^r = e^{\ln(a) \cdot r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

(v) $\ln(e^{\ln(a)x}) = x \ln(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

(vi) Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt $\ln(x) < \ln(y)$ aus $x < y$.

(vii) $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow e^0 = 1$ und (ii) $\Leftrightarrow e^1 = e$ und (iii) $\Leftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = (e^{\ln(x)})(e^{\ln(y)})$.

(iv) Für $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $(e^{\ln(a)\frac{p}{q}})^q = e^{\ln(a)p} = a^p$ und $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$. Wegen der Eindeutigkeit der q -ten Wurzel folgt $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$.

(v) ist offensichtlich.

(vi) folgt aus (iii) des vorhergehenden Satzes.

(vii) folgt aus (iv) des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 6.11. Für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x = e^{x \ln(a)}$

Satz 6.12 (Eigenschaften von a^x). (i) $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- (ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- (iii) Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x < a^y$ aus $x < y$.
- (iv) Für $0 < a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x > a^y$ aus $x < y$.
- (v) Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x$ bijektiv und stetig.

Beweis:(i) $a^{x+y} = e^{x \ln(a) + y \ln(a)} = e^{x \ln(a)} e^{y \ln(a)} = a^x a^y$.

(ii) $(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{y \cdot x \ln(a)} = a^{xy}$.

(iii) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$. Also folgt $x \ln(a) < y \ln(a)$ und $a^x < a^y$ aus $x < y$.

(iv) Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$. Also folgt $x \ln(a) > y \ln(a)$ und $a^x > a^y$ aus $x < y$.

(v) Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $\ln(a) \neq 0$. Also ist $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(a)x$ bijektiv und stetig, und damit auch $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \exp(\ln(a)x)$. **q.e.d.**

Definition 6.13 (des Logarithmus zur Basis a). Für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sei $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ die Umkehrfunktion von a^x .

Satz 6.14 (Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a). (i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iv) Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt $\log_a(x) < \log_a(y)$ aus $x < y$.

(v) Für $0 < a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt $\log_a(x) > \log_a(y)$ aus $x < y$.

(vi) $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$ ist bijektiv und stetig.

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von \ln .

q.e.d.

6.3 Die reellen Funktionen \sin , \cos , \arcsin , \arccos

Satz 6.15. (i) Für alle $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ gilt $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

(ii) Für alle $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$ gilt $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$.

(iii) $\cos : [0, \sqrt{6}] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend.

(iv) \cos hat auf $[0, 2]$ genau eine Nullstelle, die wir mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen.

(v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$.

(vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n$ $\sin(n\pi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(vii) $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$ $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(viii) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$ und $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

(ix) $\cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = -(-1)^n \sin(x)$ und $\sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x)$.

(x) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$ ist streng monoton steigend und bijektiv.

(xi) $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend und bijektiv.

Beweis:(i) Für alle $x \in [-5, 5]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $0 < \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$. Also ist für $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ die Folge $\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ folgt dann $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ wie im Beweis zu Satz 4.13.

(ii) Für $x \in [-6, 6]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $0 < \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} < 1$. Also ist für $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$ die Folge $\left(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$ folgt wieder $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$ wie im Beweis von Satz 4.13.

(iii) Für $x, y \in [0, \sqrt{6}]$ mit $x < y$ gilt $0 < \frac{y+x}{2} < \sqrt{6}$. Aus (ii) und dem Additionstheorem folgt $\cos(x) - \cos(y) = \cos\left(\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$.

(iv) \sin und \cos sind wegen Beispiel 5.21 stetig auf ganz \mathbb{R} . Wegen (i) ist $\cos(2) < 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in $[0, 2]$ gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.

(v) Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt aus (iv) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und aus (ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Also gilt $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Dann folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$.

(vi) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(ni\pi) = (i)^{2n} = (-1)^n$, also $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\sin(n\pi) = 0$.

(vii) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel: $\exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)i\pi\right) = (-1)^n i$ also $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$ und $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$.

(viii) Wegen (vi) folgt aus der Eulerschen Formel $\cos(x + n\pi) + i \sin(x + n\pi) = \exp(ix + ni\pi) = \exp(ix)(-1)^n = (-1)^n(\cos(x) + i \sin(x))$, also (viii).

(ix) Wegen (vii) folgt aus der Eulerschen Formel $\cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) + i \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \exp\left(ix + \left(n + \frac{1}{2}\right)i\pi\right) = \exp(ix)(-1)^n i = (-1)^n(i \cos(x) - \sin(x))$, also (ix).

(x) Aus (ix) folgt $\sin(x) = \begin{cases} -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ -\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

Dann folgt (x) aus (iii).

(xi) Aus (viii) folgt $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi - x) & \text{für } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$

Dann folgt (xi) aus (iii).

q.e.d.

Die Umkehrfunktionen von (xi) und (x) heißen

Arcuscosinus	$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$,	$x \mapsto \arccos(x)$,
Arcussinus	$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,	$x \mapsto \arcsin(x)$.

Arcuscosinus ist wegen (xi) streng monoton fallend und Arcussinus wegen (x) streng monoton wachsend. Beide sind wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen (ix) gilt $\sin(-x) = -\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ und $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Satz 6.16 (Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$). *Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf Addition von $2\pi n$ eindeutig und heißt Argument von z .

Beweis: Der Fall $z = 0$ ist trivial. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $y \geq 0$ sei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arccos(\frac{x}{r}) \in [0, \pi]$. Dann gilt $x = r \cos(\varphi)$ und $r \sin(\varphi) \geq 0$. Aus $\frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$ folgt $y = r \sin(\varphi)$. Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = x + iy.$$

Für $y < 0$ sei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = -\arccos(\frac{x}{r}) \in [-\pi, 0]$. Wegen $x = r \cos(-\varphi) = r \cos(\varphi)$ und $r \sin(\varphi) \leq 0$ folgt wieder

$$z = re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = x + iy.$$

Für $(r, \varphi), (s, \vartheta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ folgt $r = |re^{i\varphi}| = |se^{i\vartheta}| = s$ aus $re^{i\varphi} = se^{i\vartheta}$ und für $r = s \neq 0$ auch $e^{i\varphi}e^{-i\vartheta} = e^{i(\varphi - \vartheta)} = 1$, was äquivalent ist zu $\varphi - \vartheta = 2\pi n$. **q.e.d.**

Die Multiplikation mit $e^{i\varphi}$ wirkt auf $z = x + iy$ wie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Diese lineare Abbildung der komplexen Zahlenebene interpretieren wir als Drehung, weil sie die Länge $\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |e^{i\varphi}z|$ und das Skalarprodukt erhält und Determinante 1 hat. Weil sie 1 auf $e^{i\varphi}$ abbildet, entspricht sie dem Winkel zwischen 1 und $e^{i\varphi}$. Im rechtwinkligen Dreieck ist mit diesem Winkel und auf 1 normierter Hypotenuse $\cos(\varphi)$ die gerichtete Länge der Ankathete und $\sin(\varphi)$ die gerichtete Länge der Gegenkathete.

Für kleine $\varphi > 0$ gilt $\varphi - \frac{\varphi^3}{6} < \sin(\varphi) < L(\varphi) < \sin(\varphi) + 1 - \cos(\varphi) < \varphi + \frac{\varphi^2}{2}$ für die Länge $L(\varphi)$ des Kreissegmentes zwischen 1 und $e^{i\varphi}$. Wir unterteilen dieses Kreissegment in n gleichgroße Kreissegmente: $e^{i\varphi} = (e^{i\frac{\varphi}{n}})^n$. Das ergibt $L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} nL(\frac{\varphi}{n}) = \varphi$. Also entspricht φ einem Winkel, dessen Kreissegment im Einheitskreis die Länge φ hat.

Korollar 6.17. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv und $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt $e^z = e^x e^{iy}$. Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.16 und der Bijektivität von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, Satz 6.8 (iv). **q.e.d.**

Korollar 6.18. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.

Beweis: Seien (r, φ) die Polarkoordinaten von z . Dann müssen die Polarkoordinaten $(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ der Lösungen von $w^n = z$ die Gleichungen $n\vartheta = \varphi + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $s^n = r$ erfüllen. Also sind die Lösungen gegeben durch $s = \sqrt[n]{r}$ und $\vartheta_m = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$, wobei zwei Lösungen (s, ϑ_m) und $(s, \vartheta_{m'})$ genau dann übereinstimmen, wenn $\frac{m-m'}{n} \in \mathbb{Z}$. Also ergeben $m = 0, \dots, n-1$ alle Lösungen. **q.e.d.**

Satz 6.19 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine Nullstelle auf $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $z \mapsto |p(z)|$ ein Minimum z_0 hat. Danach zeigen wir mit dem Seziellfall in dem vorangehenden Korollar, dass beim Minimum $p(z_0) = 0$ gilt.

Für $|z| \geq R = 1 + 2 \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + 2 \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(z)}{z^n} \right| &= \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| + \left| -\frac{a_{n-1}}{z} - \dots - \frac{a_0}{z^n} \right| - \left| -a_n \left(\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right) \right| \\ &\geq |a_n| - |a_n| \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq |a_n| \left(1 - \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right|}{|z|} \right) > |a_n| \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n \geq \frac{|a_n|}{2} |z| > \frac{|a_n|}{2} 2 \frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0| = |p(0)|$ für alle $z \notin B(0, R)$. Auf der kompakten Menge $\overline{B(0, R)}$ nimmt $z \mapsto |p(z)|$ wegen Satz 5.26 das Minimum bei einem z_0 an. Dieses liegt in $B(0, R)$ und ist dann das Minimum auf ganz $z \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen jetzt $p(z_0) = 0$. Andernfalls sei $p(y + z_0) = b_n y^n + \dots + b_0$ das entsprechende Polynom in $y = z - z_0$ mit $b_n = a_n \neq 0$ und $b_0 = p(z_0) \neq 0$. Sei m das kleinste $m > 0$ mit $b_m \neq 0$. Für $|y| \leq r = \frac{1}{1 + 2 \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| + \dots + 2 \left| \frac{b_n}{b_m} \right|} \leq 1$ gilt dann

$$|b_{m+1} y^{m+1} + \dots + b_n y^n| \leq |b_m| |y|^m \left(\left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| |y| + \dots + \left| \frac{b_n}{b_m} \right| |y| \right) \leq \frac{|b_m| |y|^m}{2}.$$

Also gilt $|p(z_0 + y)| \leq |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m| |y|^m}{2}$.

Sei w eine Lösung der Gleichung $w^m b_m = -b_0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $|tw| \leq r$

$$|p(z_0 + tw)| \leq |b_0| |1 - t^m| + \frac{|b_0|}{2} |t|^m.$$

Insbesondere gilt $|p(z_0 + tw)| \leq |b_0| \left(1 - \frac{t^m}{2} \right) < |b_0|$ für alle $0 < t \leq \min \left\{ 1, \frac{r}{|w|} \right\}$.

Also sind alle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) \neq 0$ keine Minima von $z \mapsto |p(z)|$. **q.e.d.**

Korollar 6.20. *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

- (ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Sei p ein beliebiges Polynom $(n + 1)$ -ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle bei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wenn wir p als Polynom in $z - z_0$ schreiben, erhalten wir p als Produkt von $(z - z_0)$ mit einem Polynom n -ten Grades. Wegen der Induktionsvoraussetzung zerfällt dieses in ein Produkt von Polynomen ersten Grades, also auch p . **q.e.d.**

Definition 6.21 (Tangens und Cotangens).

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \cot : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Beachte $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ und $\cot(x + \pi) = \cot(x)$.

Satz 6.22. (i) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.

(ii) $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cot(x)$ ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.

Beweis: Auf $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist \sin streng monoton steigend und \cos streng monoton fallend und beide positiv. Also ist \tan streng monoton steigend und positiv. Aus $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt, dass \tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend ist.

Für $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ gilt $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ und für $x \notin \pi\mathbb{Z}$ wegen Satz 6.15 (ix) $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$. Also ist \cot auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend.

Beide Funktionen \tan und \cot sind wegen Beispiel 5.19 (iii) stetig. Dann sind die Folgen $(\tan(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$, $(-\tan(\pi - \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$, $(\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(-\cot(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ identische streng monoton fallende positive Nullfolgen. Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cot\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = -\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cot\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Also sind $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ wegen Satz 6.1 surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktionen von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ heißen

$$\begin{aligned} \text{Arcustangens} : \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), & x &\mapsto \arctan(x), \\ \text{Arcuscotangens} : \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi), & x &\mapsto \operatorname{arccot}(x). \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind wegen Satz 6.22 streng monoton und wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen Satz 6.15 (ix) gilt $\cot(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(-x)$ and $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.