Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

1.1 Mengen

Georg Cantor (1845-1918) hat den Begriff der Menge definiert als „eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. Diese Objekte werden Elemente der Menge genannt. Um ein Objekt a als Element der Menge A zu kennzeichnen, schreiben wir $a \in A$. Ist a dagegen kein Element der Menge A, so schreiben wir $a \notin A$.

Wir können Mengen dadurch beschreiben, dass wir alle ihre Elemente angeben, also z.B. ist

$$A = \{a\}$$

die Menge, die nur das Element a enthält und B

$$B = \{a, b, c\}$$

die Menge, die drei Elemente a, b und c enthält. Dabei kann auch ein Element einer Menge wieder eine Menge sein:

$$C = \{a, \{a\}\}.$$

$$M = \{x \in X \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\} \quad \text{oder nur} \quad M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\}$$

bezeichnet die Menge aller Elemente x (von der Menge X), die die Eigenschaft p haben.[1]

A ist eine Teilmenge von B, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind. In Symbolen $A \subset B$.

[1] Bei dieser Beschreibung muss man allerdings Vorsicht walten lassen, um die Russellsche Antinomie zu vermeiden. Läßt man nämlich die Menge aller Mengen zu, die sich nicht selbst als Element enthalten, so wird nicht entscheidbar, ob diese Menge sich selbst als Element enthält oder nicht. Als Ausweg wird in der axiomatischen Mengenlehre die Frage, ob eine Menge Element einer Menge ist, nicht in allen Fällen als sinnvoll zugelassen.

1.2 Operationen von Mengen

Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cup B$ aller Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen A und B enthalten sind. Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cap B$ aller Elemente, die sowohl Element von A als auch Element von B sind. Die Differenzmenge $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente von A, die nicht Element von B sind. Das kartesische Produkt der Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) von Elementen von A und B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Dabei ist die leere Menge $\emptyset$ stets ein Element der Potenzmenge.
z.B. $\mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Wenn wir nur Teilmengen einer vorgegebenen Menge M betrachten, dann wird für eine solche Menge $A \in \mathcal{P}(M)$ die Menge $M \setminus A$ auch als das Komplement A^c bezeichnet. Diese Operationen erfüllen die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{rcc}
\text{(Idempotenz)} & A \cup A = A & A \cap A = A \\
\text{(Kommutativität)} & A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
\text{(Assoziativität)} & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
\text{(Distributivität)} & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
\text{(de Morgan)} & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c & (A \cup B)^c = A^c \cap B^c
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A \subset A \cup B & & A \cap B \subset A \\
A \cup \emptyset = A & & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \setminus A = \emptyset & & A \setminus \emptyset = A \\
(A^c)^c = A & & A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c \\
(A \subset B \text{ und } B \subset A) & \Longleftrightarrow & A = B \\
A \cup B = B & \Longleftrightarrow & A \subset B \\
A \cap B = A & \Longleftrightarrow & A \subset B \\
(A \subset C \text{ und } B \subset C) & \Longleftrightarrow & (A \cup B) \subset C \\
(C \subset A \text{ und } C \subset B) & \Longleftrightarrow & C \subset (A \cap B)
\end{array}$$

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C \qquad (A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C.$$

1.3 Relationen

Als Relationen auf einer Menge bezeichnet man Aussagen über mehrere Elemente der Menge, die entweder wahr oder falsch sind. Wir wollen hier nur Aussagen über zwei Elemente einer Menge A betrachten. Jede solche Relation beschreiben wir durch eine Teilmenge R aller geordneten Paare in $A \times A$, in der wir alle die Paare zusammenfassen, für die die Aussage der Relation wahr ist. Wir sagen dann, dass $(a, b) \in A \times A$ diese Relation erfüllt, wenn (a, b) zu der Teilmenge R gehört. Andernfalls erfüllt (a, b) die Relation nicht. Wir führen jetzt folgende Eigenschaften einer Relation ein:

Reflexivität:	für alle $a \in A$ erfüllt (a, a) die Relation.
Symmetrie:	falls (a, b) die Relation erfüllt, dann auch (b, a).
Transitivität:	falls (a, b) und (b, c) die Relation erfüllen, dann auch (a, c).

Definition 1.1. *Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Eine Äquivalenzrelation definiert dann sogenannte Äquivalenzklassen. Für jedes $a \in A$ ist die Äquivalenzklasse $[a]$ von a die Teilmenge aller Elemente $b \in A$, so dass (a,b) die Relation erfüllt. Aus der Transitivität folgt, dass für jedes $b \in [a]$ die entsprechende Äquivalenzklasse $[b]$ in $[a]$ enthalten ist. Aus der Symmetrie folgt dann $a \in [b]$ und wegen der Transitivität wieder $[a] \subset [b]$. Wegen der Symmetrie und der Transitivität folgt aus $b \in [a]$ also $[a] = [b]$. Wenn zwei Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ beide ein Element $c \in A$ enthalten, dann gilt also $[a] = [c] = [b]$. Also sind zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich. Wegen der Reflexivität ist jedes Element in einer Äquivalenzklasse enthalten. Also zerfällt A in eine disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen, d.h. jedes Element von A gehört zu genau einer Äquivalenzklasse.

1.4 Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x von X genau ein Element $f(x)$ aus Y zuordnet:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Die Menge X der Argumente wird Definitionsbereich genannt und die Menge Y, in denen die Abbilde liegen, Wertebereich. Das Bild einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Teilmenge aller Elemente y des Wertebereichs Y, die Abbild eines Arguments in A sind:

Bild $f[A] = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$. $\exists$ steht für “es gibt (mindestens) ein”

Definition 1.2. *Eine Abbildung* $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ *heißt*

(i) *injektiv, wenn je zwei verschiedene Elemente* $x, x' \in X$ *auch auf verschiedene Elemente von* Y *abgebildet werden:*

$$\forall x, x' \in X \text{ folgt aus } x \neq x' \text{ auch } f(x) \neq f(x'). \quad \forall \text{ steht für “für alle”}$$

(ii) *surjektiv, wenn das Bild* $f[X]$ *der ganze Wertebereich* Y *ist.*

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

(iii) *bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Für jede Teilmenge $B \subset Y$ ist das Urbild von B unter f die Menge aller Elemente von X, die nach B abgebildet werden:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ besteht für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ nur aus genau einem Element. Also existiert auch die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : Y \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y) \text{ mit } f^{-1}[\{y\}] = \{f^{-1}(y)\}.$$

Offenbar gilt dann $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

1.5 Komposition von Abbildungen

Seien $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ und $g : Y \to Z,\ y \mapsto g(y)$ Abbildungen, dann definiert $g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$ die sogenannte Komposition (Verkettung) von f und g.

Satz 1.3. *Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für Abbildungen* $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x), \quad g : Y \to Z,\ y \mapsto g(y)$ *und* $h : Z \to V,\ z \mapsto h(z)$ *gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Sei $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ *eine Abbildung und seien* $\mathbb{1}_X : X \to X,\ x \mapsto x$ *und* $\mathbb{1}_Y : Y \to Y,\ y \mapsto y$ *die identischen Abbildungen von den Mengen* X *und* Y*. Dann gilt*

$$f \circ \mathbb{1}_X = f = \mathbb{1}_Y \circ f = f$$

Ist die Abbildung f *bijektiv, dann gilt auch* $\quad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y$ *und* $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X$.

Beweis:

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f)(x) && \forall x \in X \\ f \circ \mathbb{1}_X(x) &= f(x) = (\mathbb{1}_Y \circ f)(x) && \forall x \in X \\ f \circ f^{-1}(y) &= f(f^{-1}(y)) = y = \mathbb{1}_Y(y) && \forall y \in Y \\ f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x = \mathbb{1}_X(x) && \forall x \in X. \end{aligned}$$

q.e.d.