Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
Abschlußklausur – 2. Termin

7. Februar 2011

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 100.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–11 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1 (a)	12		4	10		
(b)	12		5 (a)	12		
2 (a)	8		(b)	1		
(b)	6		(c)(i)	6		**Note:**
3 (a)	11		(c)(ii)	8		
(b)	14					

1. Extremwerte.

Es sei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+x^2}\ .$$

(a) *Bestimme* alle kritischen Punkte von f, und *untersuche* jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum handelt. *(12 Punkte)*

(b) *Untersuche*, ob f ein globales Maximum und/oder Minimum besitzt, und *bestimme* gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. *(12 Punkte)*

2. Grenzwerte von Funktionen.

Berechne die folgenden Grenzwerte von Funktionen:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)}$ *(8 Punkte)*

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ mit festen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^+$ *(6 Punkte)*

3. Integration.

Bestimme die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ *(11 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x$ *(14 Punkte)*

4. Potenzreihen.

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n^2)} . \qquad \textit{(10 Punkte)}$$

5. Differenzierbarkeit.

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3} & \text{für } x > 1 \end{cases} .$$

Untersuche, ob f im Punkt $x_0 = 1$ differenzierbar ist, und *bestimme* gegebenenfalls $f'(1)$.

(12 Punkte)

(b) *Benenne* den Satz der Vorlesung (entweder durch Angabe seines Namens oder durch die Widergabe seiner Aussage), aus dem die folgende Behauptung folgt:

„Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann besitzt f im Intervall (a, b) einen kritischen Punkt.“ *(1 Punkt)*

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + px + q = 0 . \tag{$*$}$$

Zeige mit Hilfe der Behauptung aus (b):

(i) Ist n gerade, so besitzt $(*)$ höchstens zwei Lösungen $x \in \mathbb{R}$. *(6 Punkte)*

(ii) Ist n ungerade, so besitzt $(*)$ höchstens drei Lösungen $x \in \mathbb{R}$. *(8 Punkte)*