

Martin Schmidt  
Sebastian Klein

**Analysis I**  
**Abschlußklausur**

21. Dezember 2010

**Nachname:** \_\_\_\_\_

**Vorname:** \_\_\_\_\_

**Matrikelnummer:** \_\_\_\_\_

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 100.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–11 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

*Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.*

Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	<b>Gesamtpunktzahl:</b>
1 (a)	7		3 (b)	5		
(b)	11		4 (a)	8		
2 (a)	12		(b)	6		
(b)(i)	5		(c)	8		
(b)(ii)	6		5 (a)	11		
3 (a)	7		(b)	14		

**1. Potenzreihen.**

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} x^n$ , (7 Punkte)

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} a^{(n^2)} x^n$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  fest. (11 Punkte)

[Tipp. Fallunterscheidung?]



**2. Stetigkeit.**

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases} .$$

*Untersuche  $f$  auf Stetigkeit an der Stelle  $x = 0$  sowie an der Stelle  $x = 1$ . (12 Punkte)*

(b) Es sei  $g(x) := x^3 + x + 1$ .

(i) *Zeige, dass  $g$  mindestens eine Nullstelle  $a \in [-1, 0]$  besitzt. (5 Punkte)*

(ii) *Besitzt  $g$  abgesehen von  $a$  noch weitere Nullstellen in  $\mathbb{R}$ ? Begründe die Antwort.*

*(6 Punkte)*



**3. Differentiation und Taylorpolynome.**

Es sei  $f(x) := \exp(x^2)$ .

(a) Berechne  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  und  $f'''(x)$ . (7 Punkte)

(b) Bestimme das Taylorpolynom  $T_{3,0}(x)$  von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  der Ordnung 3. (5 Punkte)



**4. Extremwerte.** Es sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ .

- (a) *Finde* alle kritischen Punkte von  $f$ , und *untersuche*, ob es sich jeweils um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von  $f$  handelt. (8 Punkte)
- (b) *Berechne*  $f(1)$  und den Grenzwert von Funktionswerten  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . (6 Punkte)
- (c) Man verwende die Ergebnisse aus (a) und (b), um zu *untersuchen*, ob  $f$  auf seinem Definitionsbereich  $[1, \infty)$  ein globales Maximum und/oder ein globales Minimum annimmt, und *bestimme* gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. (8 Punkte)





**5. Integration und Partialbruchzerlegung.**

(a) *Berechne* das folgende Integral:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2) dx . \quad (11 \text{ Punkte})$$

[Tipp. Als erstes Substitution.]

(b) *Bestimme* die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{32}{x^4 - 16} .$$

Eine Stammfunktion dieses Ausdrucks braucht **nicht** angegeben werden. (14 Punkte)

