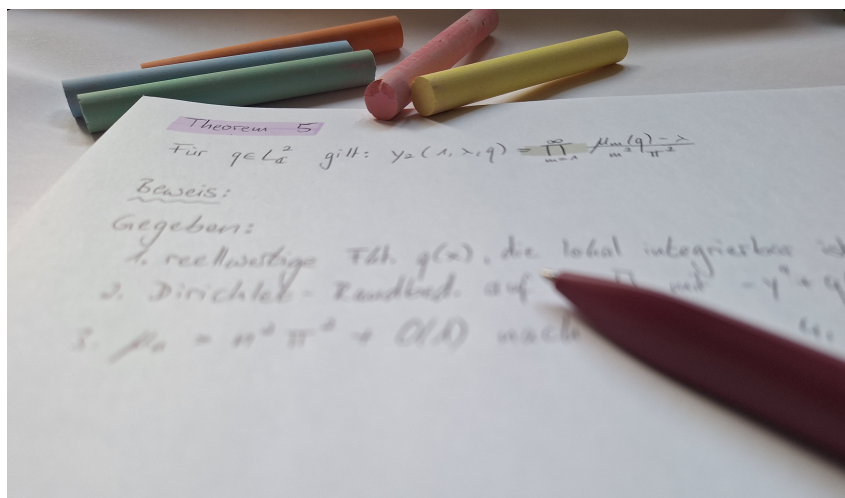


Seminar Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen HWS 2025

Prof. Dr. Martin Schmidt
Universität Mannheim



Schriftliche Ausarbeitung zum Vortrag **F. Das Dirichletproblem IV** zum
Buch

„Inverse Spectral Theory“

von J. Pöschel und E. Trubowitz (1987)

Ausarbeitung von

Julia Seibold

Matrikelnummer: 1987112

Studiengang: Master of Education Erweiterungsfach Mathematik

Fachsemester: 5

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung einzelner Aspekte des Dirichletproblems	1
1.1	Wiederholung komplexwertiger L^2 -Funktionen, also aus $L^2_{\mathbb{C}}$	1
1.2	Wiederholung der wichtigsten Definitionen zum Dirichletproblem . .	1
1.3	Wiederholung Korollar 1, Kapitel 1 (Vortrag B)	2
1.4	Wiederholung Theorem 3 (Basic Estimates), Kapitel 1 (Vortrag B) .	2
1.5	Wiederholung Lemma 1, Kapitel 2 (Vortrag C)	2
1.6	Wiederholung Lemma 2, Kapitel 2 (Vortrag C)	2
1.7	Wiederholung Theorem 2, Kapitel 2 (Vortrag D)	3
1.8	Wiederholung Theorem 4, Kapitel 2 (Vortrag E)	3
2	Drei Lemmata aus dem Anhangskapitel E zur Vorbereitung von Theorem 5 & 6	4
2.1	Lemma 1, Kapitel E	4
2.2	Lemma 2, Kapitel E	4
2.3	Lemma 3, Kapitel E	5
3	Das Dirichlet Problem Theorem 5 & 6	6
3.1	Theorem 5, Kapitel 2	6
3.2	Theorem 6, Kapitel 2	9
3.2.1	Korollar 2, Kapitel 2	9
3.2.2	Lemma 3 (Deformation Lemma), Kapitel 2	11
3.2.3	Theorem 6 (Eigenschaften der Eigenfunktion g_n)	11

1 Wiederholung einzelner Aspekte des Dirichletproblems

1.1 Wiederholung komplexwertiger L^2 -Funktionen, also aus $L^2_{\mathbb{C}}$

Wir betrachten Funktionen q , die dem komplexwertigen Lebesgue-Raum

$$q \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$$

angehören. Dabei bezeichnet $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ den Raum der (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen $q : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, die quadratintegrierbar sind, also

$$\int_{\Omega} |q(x)|^2 dx < \infty.$$

Dieser Raum ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

wobei $\overline{g(x)}$ die komplexe Konjugation von $g(x)$ bezeichnet.

1.2 Wiederholung der wichtigsten Definitionen zum Dirichletproblem

Definition 2.1 (Dirichletproblem)

Die Differentialgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1$$

mit den Randwerten

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

*heißt **Dirichletproblem**.*

Definition 2.2 (Dirichleteigenwerte)

$\lambda \in \mathbb{C}$ sind die **Dirichleteigenwerte** von q , wenn das Dirichletproblem gelöst werden kann.

Definition 2.3 (Dirichleteigenfunktion)

*Die nichttriviale Lösung wird **Eigenfunktion** von q für λ genannt.*

Definition 2.4 (Dirichletspektrum)

*Das **Dirichletspektrum** ist die Menge aller Dirichleteigenwerte.*

1.3 Wiederholung Korollar 1, Kapitel 1 (Vortrag B)

Benötigt für den Beweis von Theorem 6, Kapitel 2

Korollar 1. Jede Lösung der Differentialgleichung $-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 \leq x \leq 1$ ist eindeutig gegeben durch

$$y(x) = y(0) y_1(x) + y'(0) y_2(x).$$

Außerdem gilt: Falls eine Lösung eine doppelte Nullstelle in $[0, 1]$ besitzt, so verschwindet sie identisch.

1.4 Wiederholung Theorem 3 (Basic Estimates), Kapitel 1 (Vortrag B)

Benötigt für den Beweis von Theorem 5, Kapitel 2

Theorem 3. Auf $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ gilt:

$$\begin{aligned} |y_1(x, \lambda, q) - \cos(\sqrt{\lambda}x)| &\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}\right), \\ |y_2(x, \lambda, q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}\right), \\ |y'_1(x, \lambda, q) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)| &\leq \|q\| \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}\right), \\ |y'_2(x, \lambda, q) - \cos(\sqrt{\lambda}x)| &\leq \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

1.5 Wiederholung Lemma 1, Kapitel 2 (Vortrag C)

Benötigt für den Beweis von Theorem 5, Kapitel 2

Lemma 1. Wenn $|z - n\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ für alle ganzzahligen n , dann gilt $e^{|\Im(z)|} < 4|\sin(z)|$.

1.6 Wiederholung Lemma 2, Kapitel 2 (Vortrag C)

Benötigt für Theorem 6, Kapitel 2 bzw. Lemma 3, Kapitel 2

Lemma 2. Sei $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $N > 2e^{\|q\|}$ ganzzahlig. Dann hat $y_2(1, \lambda, q)$ genau N Nullstellen, mit Vielfachheiten gezählt, in der offenen Halbebene

$$\operatorname{Re} \lambda < \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2,$$

und für jedes $n > N$, genau eine einfache Nullstelle im eiförmigen Gebiet

$$|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}.$$

Es gibt keine anderen Nullstellen.

1.7 Wiederholung Theorem 2, Kapitel 2 (Vortrag D)

Benötigt für den Beweis von Korollar 2, Kapitel 2

Theorem 2. Wenn λ ein Dirichleteigenwert von $q \in L^2_{\mathbb{R}}$ ist, dann gilt:

$$\dot{y}_2(1, \lambda) y_2'(1, \lambda) \stackrel{i)}{=} \int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt \stackrel{ii)}{=} \|y_2(\cdot, \lambda)\|^2 \stackrel{iii)}{=} > 0.$$

iv) Insbesondere ist $\dot{y}_2(1, \lambda) \neq 0$.

v) Somit sind alle Nullstellen von $y_2(1, \lambda)$ einfache Nullstellen.

1.8 Wiederholung Theorem 4, Kapitel 2 (Vortrag E)

Benötigt für den Beweis von Theorem 5, Kapitel 2

Theorem 4. Für $q \in L^2_{\mathbb{R}}$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_n(q) &= n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t) dt - \langle \cos 2\pi n x, q \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + \ell^2(n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_n(x, q) &= \sqrt{2} \sin(\pi n x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ g_n'(x, q) &= \sqrt{2} \pi n \cos(\pi n x) + O(1). \end{aligned}$$

Diese Abschätzungen gelten gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2_{\mathbb{R}}$.

2 Drei Lemmata aus dem Anhangskapitel E zur Vorbereitung von Theorem 5 & 6

2.1 Lemma 1, Kapitel E

Benötigt für den Beweis von Lemma 2, Kapitel E

Lemma 1, E. (S. 165)

(a) Sei a_{mn} für $m, n > 1$ eine Folge komplexer Zahlen, die die Bedingung

$$|a_{mn}| = O\left(\frac{1}{|m^2 - n^2|}\right), \quad m \neq n,$$

erfüllt.

Dann gilt

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} (1 + a_{mn}) = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

(b) Falls zusätzlich $(b_n)_{n \geq 1}$ eine quadratsummierbare Folge komplexer Zahlen ist, dann gilt

$$\prod_{\substack{m, n \geq 1 \\ m \neq n}} (1 + a_{mn} b_n) < \infty.$$

2.2 Lemma 2, Kapitel E

Benötigt für den Beweis von Theorem 5, Kapitel 2

Lemma 2, E. (S. 167)

Sei $z_m, m \geq 1$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass $z_m = m^2 \pi^2 + O(1)$ ist.

Dann ist das unendliche Produkt

$$\prod_{m \geq 1} \frac{z_m - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

eine ganze Funktion in λ , deren Nullstellen genau die $z_m, m \geq 1$, sind. Außerdem gilt

$$\prod_{m \geq 1} \frac{z_m - \lambda}{m^2 \pi^2} = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

gleichmäßig auf den Kreisen $|\lambda| = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$.

2.3 Lemma 3, Kapitel E

Benötigt für den Beweis von Korollar 2, Kapitel 2

Lemma 3, Kapitel E. für den Beweis von Korollar 2, Kapitel 2 (S. 168).

Sei $z_m, m \geq 1$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass $z_m = m^2\pi^2 + O(1)$ ist.

Dann ist für jedes $n \geq 1$

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{z_m - \lambda}{m^2\pi^2}$$

eine ganze Funktion in λ , sodass

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{z_m - \lambda}{m^2\pi^2} = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

gleichmäßig für $\lambda = n^2\pi^2 + O(1)$.

3 Das Dirichlet Problem Theorem 5 & 6

3.1 Theorem 5, Kapitel 2

Theorem 5. Sei $q \in L^2_{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

$$y_2(1, \lambda, q) = \prod_{m \geq 1} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2}.$$

Beweis. Gegeben:

1. reellwertige Funktion $q(x)$, die lokal integrierbar ist
2. Dirichlet-Randbedingung auf $[0,1]$ mit $-y'' + q(x)y = \lambda y$, $y(0)=0$, $y(1)=0$
3. $\mu_n = n^2 \pi^2 + O(1)$ nach Theorem 4
- 4.

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2 + O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

ist eine ganze Funktion in λ nach Lemma 2, Kapitel E
und es gilt:

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2 + O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2} = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

gleichmäßig auf den Kreisen $|\lambda| = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$

Sei

$$p(\lambda) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2}.$$

Wir müssen zeigen, dass diese Funktion $p(\lambda)$ gleich $y_2(1, \lambda, q)$ ist.

- i) Nach Lemma 2, Kapitel E gilt, dass

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2 + O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

eine ganze Funktion in λ ist.

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2 + O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2} &\stackrel{\text{Theorem 4, Kapitel 2}}{=} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2} \\ &\Rightarrow \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2} \end{aligned}$$

ist eine ganze Funktion in λ .

ii) Auf den Kreisen $|\lambda| = r_n = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ gilt für genügend große n gleichmäßig:

$$p(\lambda) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2 + O(1) - (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{m^2 \pi^2} \stackrel{\substack{\text{Lemma 2,} \\ \text{Kapitel E}}}{=} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

iii) Die Nullstellen von $y_2(1, \lambda, q)$ sind genau die Dirichlet-Eigenwerte von q
 $\Rightarrow \lambda = \mu_m(q)$ sind die Nullstellen von p und die Dirichlet-Eigenwerte von q
 $\Rightarrow p$ und $y_2(1, \cdot)$ haben die gleichen Nullstellen (mit demselben Vielfachheitsargument)
 $\Rightarrow$ der Quotient

$$\frac{p(\lambda)}{y_2(1, \lambda)}$$

ist eine ganze Funktion [es gibt keine Polstellen, weil diese von den Nullstellen aufgehoben werden]

iv) zz: Für $h(\lambda) := \frac{p(\lambda)}{y_2(1, \lambda, q)}$ gilt $h \equiv 1$

Wegen der Abschätzungen für y_2 (Theorem 3, Kapitel 1) gilt:

$$y_2(1, \lambda) \leq \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{|\lambda|} \cdot e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}$$

und für $|\lambda| = r_n$ gilt wegen Lemma 1, Kapitel 2 gleichmäßig:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}}{|\lambda|}\right) &\stackrel{\substack{\text{Lemma 1,} \\ \text{Kapitel 2}}}{\leq} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{4 \cdot |\sin \sqrt{\lambda}|}{|\lambda|}\right) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{4 \cdot |\sin \sqrt{\lambda}|}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\lambda}}\right) \\ &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \cdot O\left(\frac{4}{\sqrt{\lambda}}\right) \stackrel{\sqrt{\lambda} = (n + \frac{1}{2})\pi}{=} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ \Rightarrow y_2(1, \lambda) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}}{|\lambda|}\right) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Lemma 1, Kapitel 2 dürfen wir hier anwenden, weil Folgendes gilt:

- Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = (n + \frac{1}{2})\pi$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Die Voraussetzung von Lemma 1, Kapitel 2 lautet: Für alle ganzen Zahlen m gelte

$$|z - m\pi| \geq \frac{\pi}{4}.$$

- zz: $|z - m\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ für beliebiges $m \in \mathbb{Z}$
Beachte, dass die in Lemma 1, Kapitel 2 erwähnte ganze Zahl nicht zwingend mit dem n des Kreises identisch sein muss; wir bezeichnen sie daher durch m .

Beweis. Für ein beliebiges ganzzahliges m benutzen wir die Dreiecksungleichung:

$$|z| = |z - m\pi + m\pi| \leq |z - m\pi| + |m\pi|.$$

Daraus folgt, weil $|z| = (n + \frac{1}{2})\pi$ und $|m\pi| = |m|\pi$ gilt,

$$|z - m\pi| \geq \left| (n + \frac{1}{2})\pi - |m|\pi \right| = |n + \frac{1}{2} - |m||\pi|.$$

Weiterhin gilt (zweite Dreiecksungleichung):

$$|m\pi| = |m\pi - z + z| \leq |m\pi - z| + |z| \Leftrightarrow |m\pi - z| \geq |m\pi| - |z|$$

Fall 1: $|m| \leq n$. Dann ist $n - |m| \geq 0$ und somit gilt wegen der ersten Dreiecksungleichung

$$|z - m\pi| \geq \left| (n + \frac{1}{2})\pi - |m|\pi \right| = |n + \frac{1}{2} - |m||\pi| \geq \frac{\pi}{2}.$$

Fall 2: $|m| > n$. Dann ist $|m| - n \geq 1$, weil $|m|$ und n ganze Zahlen sind und diesem Fall ja $|m| > n$ gilt und somit gilt wegen der zweiten Dreiecksungleichung

$$|z - m\pi| = |m\pi - z| \geq |m\pi| - |z| = |m|\pi - (n + \frac{1}{2})\pi = (|m| - n - \frac{1}{2})\pi \geq \frac{\pi}{2}.$$

In beiden Fällen, also für jedes $m \in \mathbb{Z}$, gilt daher die stärkere Ungleichung

$$|z - m\pi| \geq \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{4},$$

$\Rightarrow$ Die Voraussetzungen von Lemma 1, Kapitel 2 sind erfüllt

$\Rightarrow$ Lemma 1, Kap. 2 liefert für jeden Punkt z

auf dem Kreis $|z| = (n + \frac{1}{2})\pi$, dass $e^{|\Im z|} < 4|\sin z|$ gilt.

Also gilt $e^{|\Im \sqrt{\lambda}|} < 4|\sin \sqrt{\lambda}|$. □

v)

$$\Rightarrow \frac{p(\lambda)}{y_2(1, \lambda)} = \frac{\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \right)}{\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)} = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

für $|\lambda| = r_n$, weil $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ dominiert

Daraus folgt, dass

$$\sup_{|\lambda|=r_n} \left| \frac{p(\lambda)}{y_2(1, \lambda)} - 1 \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

vi) Das Maximumprinzip besagt, dass eine konvergente Potenzreihe in $\lambda_{\mathbb{C}}$ holomorph ist und ihr Maximum immer am Rand annimmt. Jede obere Schranke auf dem Rand vom oberen Ball ist auch Schranke im Inneren. Wenn eine Funktion also ein lokales Maximum besitzt, ist sie konstant.

Aus dem Maximumprinzip folgt also, dass die Differenz identisch verschwindet.

Daher gilt:

$$p(\lambda) = y_2(1, \lambda).$$

■

Sind die zwei Funktionen $y_2(1, \lambda, q)$ und $y_2(1, \lambda, p)$ gleich, dann gilt sicher $\mu_n(q) = \mu_n(p)$ für alle $n \geq 1$. Also haben p und q das gleiche Dirichletspektrum. Nun wissen wir, dass die Umkehrung ebenso richtig ist. Anders gesagt, die ganze Information über $y_2(1, \lambda, q)$ ist bereits im Dirichletspektrum $\mu_n(q)$, $n \geq 1$ enthalten.

3.2 Theorem 6, Kapitel 2

3.2.1 Korollar 2, Kapitel 2

Benötigt für den Beweis von Theorem 6, Kapitel 2

Exkurs: Unterschied zwischen $y_2'(x, \lambda)$ und $\dot{y}_2(x, \lambda)$

Sei

$$y_2(x, \lambda) = \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

eine Funktion, die sowohl von x als auch vom Parameter $\lambda > 0$ abhängt.

1. Ableitung nach x

Die partielle Ableitung nach x , dem Parameter in $[0,1]$ ist:

$$y_2'(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x} \sin(\sqrt{\lambda}x) = \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

2. Ableitung nach λ

Die partielle Ableitung nach dem Parameter λ ist:

$$\dot{y}_2(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Interpretation

- $y_2'(x, \lambda)$: beschreibt die Änderung der Funktion in Abhängigkeit von der Position x .
- $\dot{y}_2(x, \lambda)$: beschreibt die Änderung der Funktion in Abhängigkeit vom Parameter λ , z. B. einem Eigenwert in der Spektraltheorie.

Korollar 2.

a)

$$\dot{y}_2(1, \mu_n) = \frac{-1}{n^2 \pi^2} \prod_{m \neq n} \frac{\mu_m - \mu_n}{m^2 \pi^2} = \frac{(-1)^n}{2n^2 \pi^2} \left(1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \right).$$

b)

$$\operatorname{sgn} \dot{y}_2(1, \mu_n) = (-1)^n = \operatorname{sgn} y_2'(1, \mu_n).$$

Beweis. a) Leite mit Leibnizregel

$$y_2(1, \lambda) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

nach λ ab:

$$\begin{aligned} \dot{y}_2(1, \lambda) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\mu_l - \lambda}{l^2 \pi^2} \right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} \frac{\mu_m - \lambda}{m^2 \pi^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{l^2 \pi^2} \right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} \frac{\mu_m - \lambda}{m^2 \pi^2} \\ &\xrightarrow{\lambda = \mu_n} \dot{y}_2(1, \mu_n) = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2 \pi^2} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} \frac{\mu_m - \mu_n}{m^2 \pi^2} \end{aligned}$$

Für alle Terme mit $l \neq n$ enthält das Produkt den Faktor $\mu_n - \mu_n = 0$ $\Rightarrow$ diese Summanden verschwinden $\Rightarrow$ nur der Summand mit $l = n$ bleibt übrig:

$$\dot{y}_2(1, \mu_n) = \frac{-1}{n^2 \pi^2} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_m - \mu_n}{m^2 \pi^2}$$

Die zweite Umformung folgt aus Lemma 3, Kapitel E mit

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{\mu_m - \lambda}{m^2 \pi^2} &= \frac{1}{2} (-1)^n \cdot (-1) \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right) \\ \Rightarrow \dot{y}_2(1, \mu_n) &= \frac{-1}{n^2 \pi^2} \prod_{m \neq n} \frac{\mu_m - \mu_n}{m^2 \pi^2} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \left(1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

b)

$$\operatorname{sgn} \dot{y}_2(1, \mu_n) \underset{a)}{=} (-1)^n \underset{\substack{\text{Theorem 2,} \\ \text{Kapitel 2,} \\ \text{erstes =}}}{=} \operatorname{sgn} y_2'(1, \mu_n).$$

□

3.2.2 Lemma 3 (Deformation Lemma), Kapitel 2

Benötigt für den Beweis von Theorem 6, Kapitel 2

Lemma 3. Sei h_t , $0 \leq t \leq 1$, eine Familie reellwertiger Funktionen auf $a \leq x \leq b$, die gemeinsam stetig differenzierbar in t und x ist. Angenommen, für jedes t besitzt h_t eine endliche Anzahl von Nullstellen in $[a, b]$ - alle einfach, und die Randwerte sind unabhängig von t .

Dann haben h_0 und h_1 dieselbe Anzahl von Nullstellen in $[a, b]$.

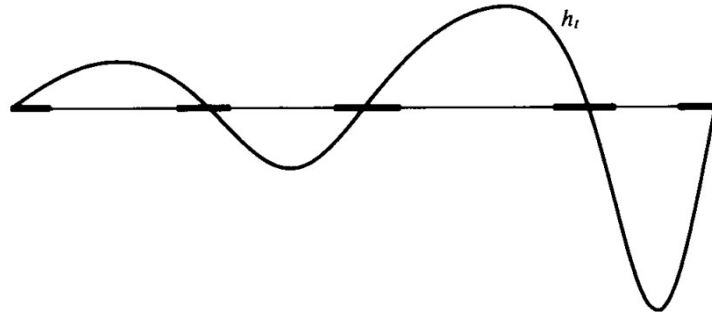
Anschaulich gesprochen bewegen sich die Nullstellen von h_t im Inneren von $[a, b]$, wenn sich t ändert, aber sie können sich niemals vereinigen oder teilen, da alle Nullstellen einfach sind. Daher ist ihre Anzahl unabhängig von t .

Beweis. Annahme [zur Vereinfachung]:

$$h_t(a) = 0 = h_t(b), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Andere Fälle werden analog behandelt.

- Fixiere ein $t \in [0, 1]$. Nach Voraussetzung sind die Nullstellen von h_t einfach.
 $\Rightarrow$ Man kann um jede dieser einfachen Nullstellen ein Intervall legen, sodass h_t innerhalb dieser Intervalle das Vorzeichen wechselt.
- Im Inneren ist h'_t nicht Null und außerhalb dieser Intervalle ist h_t selbst nicht Null. Siehe Abbildung:



Verlauf einer Funktion h_t mit einfachen Nullstellen.

- Durch Stetigkeit verhalten sich h_s und h_t auf diesen Intervallen exakt gleich, wenn s hinreichend nahe bei t liegt $\Rightarrow h_s$ hat genau dieselbe Anzahl von Nullstellen wie h_t , wenn s nahe bei t ist
- Dieses Argument gilt für alle $t \in [0, 1]$, also ist die Anzahl der Nullstellen unabhängig von t . Insbesondere gilt dies für h_0 und h_1 .

□

3.2.3 Theorem 6 (Eigenschaften der Eigenfunktion g_n)

Definition von $g_n(x, q)$:

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|} = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\sqrt{y_2'(1, \mu_n)y_2'(1, \mu_n)}}$$

Theorem 6.

(a) i) Für jedes $q \in L^2_{\mathbb{R}}$ hat die Eigenfunktion g_n für $n \geq 1$ genau $n+1$ Nullstellen in $[0, 1]$.

ii) Die Nullstellen sind alle einfache Nullstellen.

Die Gradienten sind gemeinsam stetig in Bezug auf x, λ, q .

(b) Sei q gerade.

Dann ist g_n gerade, wenn n ungerade ist.

Und g_n ist ungerade, wenn n gerade ist.

Gerade und ungerade meint gerade und ungerade am Punkt $\frac{1}{2}$.

Die Aufgabe, die Nullstellen von g_n zu zählen, wird durch das vorangegangene Lemma 3, Kapitel 2, das „Deformationslemma“ vereinfacht.

Beweis. a) ii) $g_n(x, q)$ verschwindet nicht identisch
 $\rightarrow$ für ein festes q ist $g_n(x, q) = 0$
 $\rightarrow$ aber g_n kann nicht identisch Null für alle x sein,
 weil $y_2(x, \mu_n)$ abgeleitet eins und nicht null ist

$\xrightarrow[\text{Kapitel 1}]{\text{Korollar 1}}$ Nullstellen von g_n sind alle einfach

i) Beh.: Die Anzahl der Nullstellen ist endlich

Beweis:

Ann.: es gibt unendliche viele Nullstellen in $[0, 1]$

Da $[0, 1]$ kompakt und beschränkt ist, gäbe es einen Häufungspunkt an einer mehrfachen Nullstelle

$\rightarrow$ Widerspruch zu ii)

$\Rightarrow$ Anzahl der Nullstellen ist endlich

Betrachte nun die Deformation h_t von g_n , gegeben durch

$$h_t(x) = g_n(x, tq), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Offensichtlich verschwindet h_t für jedes t bei 0 und 1 und besitzt nur eine endliche Anzahl von Nullstellen in $[0, 1]$, die alle einfach sind.

$\xrightarrow[\text{Kapitel 2}]{\text{Lemma 3}}$ $h_1 = g_n$ besitzt ebenso viele Nullstellen in $[0, 1]$

wie $h_0 = \sqrt{2} \sin n\pi x$ mit den Nullstellen $x_k = \frac{k}{n}$.

$\Rightarrow g_n$ hat genau $n + 1$ Nullstellen in $[0, 1]$.

b) Sei q gerade, d. h. $q(1-x) = q(x)$ für $0 \leq x \leq 1$.

Setze $1-x$ anstelle von x [um die Eigenfunktion zu spiegeln] in

$$-g_n'' + q(x)g_n = \mu_n g_n$$

ein und verwende g_n als Lösung und μ_n als Eigenwert:

$$-g_n''(1-x) + q(x)g_n(1-x) = \mu_n g_n(1-x).$$

$\Rightarrow g_n(1-x)$ ist ebenfalls eine Eigenfunktion von q zum Eigenwert μ_n mit Norm 1.

$\Rightarrow$

$$g_n(x) = -\operatorname{sgn}\left(g'_n(1)\right)g_n(1-x).$$

$$\xleftrightarrow[\operatorname{sgn}(g'_n(1)) = (-1)^n]{\text{Korollar 2, Kap.2}} g_n(x) = -(-1)^n \cdot g_n(1-x)$$

und es folgt die Behauptung. ■

Eines der Hauptziele der klassischen Sturm–Liouville-Theorie besteht darin, die Fourier-Sinus-Entwicklung zu verallgemeinern. Die Idee ist, die Sinusfunktionen durch Eigenfunktionen eines Randwertproblems für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu ersetzen. Dies war ein Vorläufer des abstrakten Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren.