

Universität Mannheim

Einführung in das Dirichlet-Problem

Ausarbeitung im Rahmen des Moduls „Ausgewählte Themen gewöhnlicher
Differentialgleichungen und Dynamischen Systemen“

Vorgelegt von:

Emily Seibel

Matrikelnummer: 1988578

Betreuer: Prof. Dr. Schmidt

19. November 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Definitionen und Einleitung	2
2	Der selbstadjungierte Operator	2
3	Die Shooting Methode	3
4	Der Fall für $q = 0$	3
5	Lemma 1	4
6	Lemma 2: Das Zähllemma	7

1 Definitionen und Einleitung

Das Dirichlet Problem gehört zur Theorie partieller Differentialgleichungen und ist ein Randwertproblem für die folgende Differentialgleichung:

$$y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

Dabei ist $0 < x < 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $q \in L^2([0, 1])$ eine vorgegebene Funktion auf dem Hilbertraum aller reellwertigen quadratintegrierbaren Funktionen aus $[0, 1]$. Man untersucht, ob nichttriviale Lösungen $y(x)$ existieren, welche die Dirichlet Randbedingungen erfüllt:

$$y(0) = y(1) = 0$$

Eine komplexe Zahl λ heißt **Dirichlet-Eigenwert von q** wenn das Dirichlet-Problem gelöst werden kann. Die zugehörigen, nichttrivialen Lösungen $y(x)$ heißen **Eigenfunktionen von q zu λ** . Die Gesamtheit aller Eigenwerte von q heißt **Dirichlet-Spektrum**.

2 Der selbstadjungierte Operator

Man betrachtet den unbeschränkten, linearen Operator

$$Q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad \text{bzw.} \quad Qy(x) = -y''(x) + q(x)y(x).$$

Hierbei ist $y(x)$ die Funktion, die auf den Operator wirkt und $q(x)$ eine vorgegebene Funktion.

Q ist für f in der dichten Teilmenge $D \subset H^1_{\mathbb{C}}([0, 1])$, die an den Punkten 0 und 1 verschwindet, selbstadjungiert. Das heißt für alle Funktionen $f, g \in D(Q)$ gilt:

$$\langle Qf, g \rangle = \langle f, Qg \rangle.$$

Dieser Operator ist mit einer symmetrischen Matrix gleichzusetzen. Er hat reelle Eigenwerte und seine Eigenfunktionen für verschiedene Eigenwerte sind orthogonal zueinander. Sie bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums.

Man könnte beispielsweise zeigen, dass das Dirichlet-Spektrum gleich dem Spektrum von Q ist, um zu beweisen dass die Eigenwerte des Dirichlet-Problems reell sind. Allerdings kann man mit diesem Operator keine Rückschlüsse ziehen, wo genau diese Eigenwerte liegen. Dafür verwendet man eine andere Herangehensweise, mit welcher sich der nächste Abschnitt befasst.

3 Die Shooting Methode

Die Shooting-Methode nach Sturm ist ein wichtiges Werkzeug um das Dirichlet-Problem zu lösen. Sie ist ein numerisches Verfahren, dass zur Lösung von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen geeignet ist und wird verwendet um die Existenz und Eindeutigkeit der Eigenwerte und Eigenfunktionen zu beweisen.

Bei dieser Methode wird das Randwertproblem zu einem Anfangswertproblem umgewandelt. Dafür wählt man die Anfangsbedingungen

$$y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1$$

Eine Lösung y_2 wird am linken Randpunkt des Intervalls mit der Geschwindigkeit 1 „abgeschossen“. Bei $x = 1$ erreicht die Lösung den Wert $y_2(1, \lambda)$. Die Idee ist nun den Parameter λ so zu variieren, dass der Endwert 0 ist. Anschaulich gesprochen, sucht man nach dem passenden „Schusswinkel“ λ , so dass die Kurve genau bei $y_2 = 0$ ankommt. Das bedeutet also, dass man die Dirichlet-Eigenwerte λ als Nullstellen der Funktion $y_2(1, \lambda)$ erhält.

Man kann folgern, wenn p eine Nullstelle von $y_2(1, \lambda)$ ist, so ist $y_2(x, p)$ eine Lösung und p ein Dirichlet-Eigenwert von q . Die Umkehrung gilt genauso: Ist p ein Dirichlet-Eigenwert von q mit Eigenfunktion $y(x)$, dann gilt:

$$y(x) = y'(0) y_2(x, p)$$

4 Der Fall für $q = 0$

In diesem Abschnitt soll eine Lösung für den Fall $q = 0$ hergeleitet werden.

Wenn wir $q = 0$ setzen, erhält man die Differentialgleichung:

$$-y'' = \lambda y$$

Hierfür gilt die allgemeine Lösung:

$$y(x) = A \sin(\sqrt{\lambda} x) + B \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

Aus der Randbedingung $y(0) = 0$ folgt:

$$y(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B = 0$$

Damit vereinfacht sich die Lösung zu

$$y(x) = A \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Aus der zweiten Randbedingung $y(1) = 0$ folgt:

$$y(1) = A \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 1) = A \sin(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, muss gelten

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Also sind die Eigenwerte

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, muss A noch bestimmt werden. Dafür wenden wir Randwertbedingungen aus der Shooting-Methode an. Für die Randbedingung $y'_2(0) = 1$ ergibt sich:

$$y'(0) = A\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) = 1$$

Da $\cos(0) = 1$ folgt

$$A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Damit gilt:

$$y_2(x, \lambda, 0) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda} x)}{\sqrt{\lambda}}$$

5 Lemma 1

Aussage:

Wenn $|z - n\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ für alle ganzen Zahlen n , dann gilt

$$e^{|\Im z|} < 4 |\sin(z)|.$$

Beweis:

Im Beweis soll ausgeführt werden, dass $|\sin z|^2$ eine exponentielle untere Schranke besitzt mit $z = x + iy$. Dieser Ausdruck ist folgendermaßen definiert:

Aufgrund des Additionstheorem gilt:

$$\begin{aligned}
 |\sin z|^2 &= \sin^2(x) \cosh^2(y) + \cos^2(x) \sinh^2(y) \\
 &= \sin^2(x)(1 + \sinh^2(y)) + \cos^2(x) \sinh^2(y) \\
 &= \sin^2(x) + \sin^2(x) \sinh^2(y) + \cos^2(x) \sinh^2(y) \\
 &= \sin^2(x) + (\sin^2(x) + \cos^2(x)) \sinh^2(y) \\
 &= \sin^2(x) + \sinh^2(y) \\
 &= \sin^2(x) + \cosh^2(y) - 1 \\
 &= \cosh^2(y) - (1 - \sin^2(x)) \\
 &= \cosh^2(y) - \cos^2(x)
 \end{aligned}$$

Der Term $\sin^2(x)$ ist periodisch, da

$$\begin{aligned}
 \sin^2(x + \pi) &= (\sin^2(x) \cos(\pi) + \sin(\pi) \cos(x))^2 = ((\sin(x) * (-1) + \cos(x) * 0))^2 = (-\sin(x))^2 \\
 &= \sin^2(x)
 \end{aligned}$$

Da $|\sin z|^2$ von $\sin^2 z$ abhängt, ist somit $|\sin z|^2$ genauso π -periodisch. Da $\sin^2(x)$ außerdem eine gerade Funktion ist, reicht es, den Ausdruck auf dem Intervall $x \in [0, \pi/2]$ zu untersuchen.

Fall 1: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Da $\cos^2(x)$ eine fallende Funktion ist, folgt, dass:

$$\cos^2(x) \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

Für alle reellen y gilt :

$$\cosh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \geq 1$$

Daraus folgt:

$$\frac{3}{4} \leq \frac{3}{4} \cosh^2(y)$$

Zusammengesetzt erhält man:

$$\cos^2(x) \leq \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4} \cosh^2(y)$$

Daraus kann man folgern :

$$|\sin z|^2 \geq \cosh^2(y) - \frac{3}{4} \cosh^2(y) = \frac{1}{4} \cosh^2(y)$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich :

$$|\sin z| > \frac{1}{2} \cosh(y) = \frac{1}{2} \frac{e^{|y|}}{2} = \frac{1}{4} e^{|y|}$$

Da wir y als den Imaginärteil von z gesetzt haben folgt die Behauptung

Fall 2: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

Aus der Lemmabedingung weiß man

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\pi}{4} \iff x^2 + y^2 \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

Daraus folgt

$$y^2 \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - x^2$$

Wenn man den Hochpunkt $\frac{\pi}{6}$ wieder einsetzt, erhält man :

$$y^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{5}{144} \pi^2$$

Wegen der Taylorreihe von $\cosh^2$ kann man folgern

$$\cosh^2(y) \geq 1 + y^2 \geq 1 + \frac{5}{144} \pi^2 \geq \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3} \cos^2(x)$$

Diese Abschätzung wurde bereits in Fall 1 thematisiert, deshalb gilt wieder

$$|\sin z|^2 > \frac{1}{4} \cosh^2(y)$$

Das kann man weiter abschätzen durch

$$|\sin z|^2 > \frac{1}{4} \cosh^2(y) > \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2|y|}}{4} \right)$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir die Aussage des Lemmas. Damit wurde die Aussage allgemein bewiesen.

q.e.d.

Diese Abschätzung aus dem Lemma ist allerdings nicht optimal, sondern der Bequemlichkeit halber gewählt. Im Allgemeinen gilt :

Es existiert für jedes $\delta > 0$ eine Konstante c_δ , sodass
 $e^{|\Im z|} < c_\delta \cdot |\sin z|$, vorausgesetzt $|z - n\pi| > \delta$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

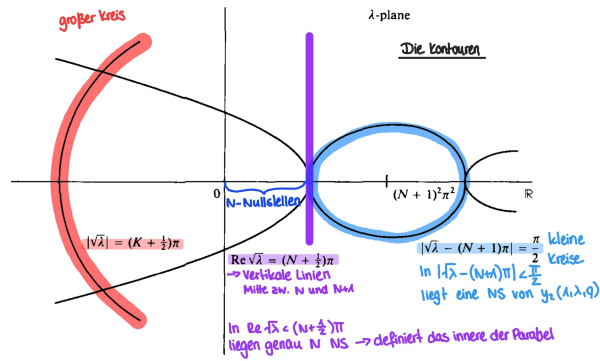


Abbildung 1: Die Kontouren

6 Lemma 2: Das Zähllemma

Aussage:

Sei $q \in L_2(\mathbb{C})$ und $N > 2e\|q\|$ eine ganze Zahl. Dann hat $y_2(1, \lambda, q)$ genau N Nullstellen, gezählt mit Vielfachheiten, in der offenen Halbebene

$$\Re \lambda < \frac{(N+1)^2 \pi^2}{2},$$

und für jedes $n > N$ genau eine einfache Nullstelle in der eiförmigen Region

$$|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}.$$

Es gibt keine weiteren Nullstellen.

Beweisidee/Vorbereitung: Die Hauptaussage die man dem Lemma entnehmen kann ist dass es unendlich viele Dirichlet-Eigenwerte, welche wieder als Nullstellen der Funktion y_2 dargestellt werden, und ihre ungefähre Lage. Man möchte also herausfinden, wie viele Nullstellen y_2 in bestimmten Bereichen der komplexen Ebene hat. Das macht man indem man y_2 mit einer Funktion vergleicht, dessen Nullstellenstruktur bereits bekannt ist :

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda})x}{\sqrt{\lambda}}, \lambda = n^2 \pi^2$$

Man zeigt mit dem Satz von Rouché, dass die Nullstellen von y_2 nur wenig von den Nullstellen von $\frac{\sin(\sqrt{\lambda})x}{\sqrt{\lambda}}$ abweichen. Dieser sagt nämlich aus :

Seien f und g holomorphe Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und sei $\gamma \subset G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, deren Inneres ganz in G liegt.

Gilt

$$|f(\lambda) - g(\lambda)| < |g(\lambda)| \quad \text{für alle } \lambda \in \gamma,$$

so haben f und g gleich viele Nullstellen (mit Multiplizität gezählt) im Inneren von γ . In diesem Beweis definieren wir $G_n := \{z \in \mathbb{C} : |z - n\pi| < \frac{\pi}{2}\}$, $\gamma_n := \{z \in \mathbb{C} : |z - n\pi| = \frac{\pi}{2}\}$, f als $y_2(x, \lambda, q)$ und g als $\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}$

Deshalb definiert man Kontouren, die jeweils die Nullstellen $n^2\pi^2$ umschließen. So zeigt man wie viele Nullstellen y_2 in den bestimmten Bereichen hat

Beweis Zuerst fixiert man ein $N \in \mathbb{N}$, welches $N > 2e^{\|q\|}$ und eine weitere Zahl $K > N$. Bevor man auf die Kontouren eingeht, muss man von der λ -Ebene in die $\sqrt{\lambda}$ -Ebene transformieren. Dafür zeigen wir, dass die folgenden Ausdrücke gleich sind:

$$\lambda = x + iy, \quad \sqrt{\lambda} = \alpha + i\beta$$

Quadriere $\sqrt{\lambda}$:

$$(\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2$$

Schreibe Real- und Imaginärteil getrennt:

$$\text{Realteil: } \Re((\alpha + i\beta)^2) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\text{Imaginärteil: } \Im((\alpha + i\beta)^2) = 2\alpha\beta$$

Da $(\alpha + i\beta)^2 = \lambda = x + iy$, folgt sofort:

$$\Re(\lambda) = x = \alpha^2 - \beta^2, \quad \Im(\lambda) = y = 2\alpha\beta$$

Somit stimmen die Real- und Imaginärteile von $\sqrt{\lambda}$ mit den Real- und Imaginärteilen von λ überein.

Geometrische Bedeutung In der $\sqrt{\lambda}$ -Ebene betrachtet man vertikale Linien der Form

$$\Re\sqrt{\lambda} = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Wenn man von der $\sqrt{\lambda}$ - in die λ -Ebene wechselt, dann transformiert sich diese Linie zu einer nach links geöffneten Parabel. Das geschieht durch die Abbildung

$$\lambda = (\alpha + i\beta)^2.$$

Wenn man $x = \alpha^2 - \beta^2$ und $y = 2\alpha\beta$ setzt, so beschreibt diese Gleichung die genannte Parabel:

$$x = \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \pi \right)^2 - \left(\frac{y}{2 \left(N + \frac{1}{2} \right) \pi} \right)^2$$

$$x = \left(N + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{y^2}{4 \left(N + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}.$$

Anwendung Satz von Rouché Zuerst benennen wir die Kontouren auf denen wir den Satz anwenden wollen. Diese sind $\Re \lambda = \left(N + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2$ und $|\sqrt{\lambda}| = \left(K + \frac{1}{2} \right) \pi$. Gemeinsam schließen sie ein beschränktes Gebiet ein, was man aus der zugehörigen Skizze entnehmen kann. Von links wird es von der Parabel begrenzt und von außen durch den großen Kreis abgeschlossen.

Um von der Aussage des Satz von von Rouché Gebrauch zu machen, muss gezeigt werden, dass die Abschätzung gilt. Dafür verwendet man ein Basic Estimate und die Abschätzung aus Lemma 1:

$$\left| y_2(x, \lambda, q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|\Im(\lambda)|x + \|q\|\sqrt{x}).$$

Die obere Schranke kann umgeschrieben werden zu:

$$\left| y_2(x, \lambda, q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{e^{\|q\|}}{|\sqrt{\lambda}|} \frac{e^{\Im \sqrt{\lambda}}}{|\sqrt{\lambda}|}$$

Der erste Bruch kann durch die Fixierung $N > 2e^{\|q\|}$ und der zweite mittels Lemma 1 abgeschätzt werden. Warum wir Lemma 1 anwenden dürfen zeigen wir nun. Wir müssen beweisen, dass auf jeder Kontour die Voraussetzung $|z - l\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ erfüllt ist :

Wir fixieren ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ und lassen $l \in \mathbb{N}$ eine beliebige, weitere Zahl sein und setzen $z = \sqrt{\lambda}$

$$1. \Re z = \left(N + \frac{1}{2} \right) \pi$$

$$|z - l\pi| \geq |\Re(z - l\pi)| \geq \left(N + \frac{1}{2} \right) \pi \geq \pi/2$$

$$2. |z| = \left(K + \frac{1}{2} \right) \pi$$

Man kann mittels der Dreiecksungleichung abschätzen :

$$|z| = |z - n\pi + n\pi| \leq |z - n\pi| + |n\pi|$$

$$\text{Es folgt für } n \leq K : |z - n\pi| \geq |z| - n\pi \geq \pi/2$$

$$\text{Es gilt: } |n\pi| = |n\pi - z + z| \leq |n\pi - z| + |z|$$

Und somit für $n > K$: $|z - n\pi| \geq n\pi - |z| \geq \pi/2$

$$3. |z - n\pi| = \frac{\pi}{2}$$

Für $l = n$ gilt offenbar: $|z - l\pi| = |z - n\pi| = \pi/2$

Für $n \neq l$ gilt: $|(n-l)\pi| \leq |(z-l\pi) - (z-n\pi)| \leq |z-l\pi| + |z-n\pi|$

Daraus folgt: $|z - l\pi| \geq |(n-l)\pi| - |z - n\pi| \geq \pi - \pi/2 = \pi/2$

Somit ist $\sqrt{\lambda}$ stets mindestens $\frac{\pi}{4}$ von den Nullstellen von $\sin(z)$ entfernt und die Voraussetzung von Lemma 1 ist auf jeder Kontour erfüllt. Daher kann man die Abschätzung auf jeder Kontour verwenden.

Damit erhält man:

$$\leq \frac{4 |\sin(\sqrt{\lambda})|}{|\sqrt{\lambda}|} \cdot \frac{\frac{1}{2}N}{|\sqrt{\lambda}|}$$

Dieser Ausdruck kann man umformen zu:

$$\frac{2N}{|\sqrt{\lambda}|} \cdot \frac{|\sin(\sqrt{\lambda})|}{|\sqrt{\lambda}|}$$

Da $|\sqrt{\lambda}| = (K + \frac{1}{2})\pi$ mit $K > N$ definiert ist, kann man für die Kontouren folgern, dass $\frac{2N}{|\sqrt{\lambda}|}$ kleiner 1 sein muss. Also gilt:

$$< \frac{|\sin(\sqrt{\lambda})|}{|\sqrt{\lambda}|}$$

Damit ist die Voraussetzung erfüllt:

$$|y_2(1, \lambda, q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}| < \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \right|$$

Diese Abschätzung gilt auf jeder Kontour. Somit gilt dass y_2 und $\frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$ die gleiche Anzahl an Nullstellen haben müssen, da sie auf den Rändern der Kontouren gleich groß sein müssen. Man wendet die Aussage von dem Satz von Rouché also auf jeder Kontour an: $|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}$, $|\sqrt{\lambda}| > (K + \frac{1}{2})\pi$ und $\Re \lambda = (N + \frac{1}{2})^2 \pi^2$

Um jetzt Rückschlüsse ziehen zu können, wie die Nullstellenstruktur von y_2 aussehen muss, bestimmt man die Nullstellen von $\frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$

Nullstellenvergleich: Die Nullstellen von $\frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$ sind gleichmäßig verteilt bei $\lambda = n^2 \pi^2$, beziehungsweise $\sqrt{\lambda} = n\pi$

1. $|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}$ (Innerhalb der kleinen Kreise):

Diese Region umschließt jeweils die Punkte $n\pi$. Da somit die nächste Nullstelle $(n+1)\pi$

entfernt ist, kann in jedem "kleinen Kreis" nur eine Nullstelle liegen

→ y_2 hat auch genau eine Nullstelle

2. $|\sqrt{\lambda}| > \left(K + \frac{1}{2}\right) \pi$ (Außerhalb des großen Kreises):

Dieser Kreis schließt alle Punkte bis $K\pi$ ein. Somit existieren in dieser Kontour K Nullstellen, N Nullstellen die durch das Gebiet $\Re z = \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi$ und $|z| = \left(K + \frac{1}{2}\right) \pi$ definiert werden und jeweils genau eine Nullstelle für $n > N$ in den eiförmigen Region. Dies folgt aus der Anwendung des Satz von Rouché. Weitere Nullstellen existieren nicht.

Angenommen es gäbe eine weitere Nullstelle, dann muss diese für ein hinreichend großes K in $|\sqrt{\lambda}| = \left(K + \frac{1}{2}\right) \pi$. Hier gelten allerdings die Voraussetzungen und die Aussage des Satz von Rouché. Die Vergleichsfunktion hat N Nullstellen in der ersten Kontour und endlich viele Nullstellen in den Kontouren die für $n \leq K$ in der zweiten Kontour. Somit hat die Vergleichsfunktion genau K Nullstellen. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass eine weitere Nullstelle existiert.

→ y_2 hat auch keine Nullstellen im unbeschränkten Bereich

3. $\Re \lambda = \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ (Die vertikale Linie):

Diese Linie schließt alle Nullstellen bis $N\pi$ ein, solange $n \geq N$. Damit liegen genau N Nullstellen links von der Linie

→ y_2 hat auch N Nullstellen

q.e.d.