Fakultät für Wirtschaftsmathematik und Wirtschaftsinformatik

Vortrag B: Die Fundamentallösung II

Seminararbeit Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

vorgelegt von

Matthias Müller

Dozent:

Prof. Dr. Martin Schmidt, Universität Mannheim

Oktober 2025

Einleitung

Diese Arbeit behandelt das Thema „*Vortrag B: Die Fundamentallösung II*“ aus dem Seminar „*Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme*“. Ziel ist es die Fundamentallösung eines Anfangswertproblems zweiter Ordnung zu bestimmen. Grundlage bildet das erste Kapitel von Pöschel, J., Turbowitz, E. Inverse Spectral Theory. Boston, (1987) [1]. Darüber hinaus werden die Kenntnisse aus dem vorangegangenem „*Vortrag A: Die Fundamentallösung I*“ von Felix Haas und den Skripten „*Analysis I/II*“ und „*Dynamische Systeme*“ von Prof. Dr. Martin U. Schmidt vorausgesetzt.

Das Ausgangsproblem

Wir wollen einen kurzen Blick auf das Ausgangsproblem und die bisher gewonnen Erkenntnisse werfen.
Für $q \in L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ wollen wir für das Anfangswertproblem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in [0,1] \tag{1}$$

mit

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

eine Fundamentallösung finden. Da die Differentialgleichung zweiter Ordnung ist folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, dass der Lösungsraum zweidimensional ist und wir für eine Fundamentallösung zwei linear unabhängige Lösungen finden müssen. Eine Lösung definieren wir wie folgt:

Definition 1
y ist eine Lösung für das Ausgangsproblems 1, falls $y \in \mathcal{C}^1 \cap W^{2,1}([0,1])$[1] und y die Anfangswertbedingungen erfüllt.

Um nun die Fundamentallösung zu konstruieren machen wir den folgenden Ansatz. Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1 \cap W^{2,1}([0,1])$ zwei Lösungen der Differentialgleichung 1 mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(0,\lambda,q) = y_2'(0,\lambda,q) = 1$$
$$y_1'(0,\lambda,q) = y_2(0,\lambda,q) = 1.$$

[1] $W^{2,1}([0,1] = \{u \in L^1 : D^\alpha u \in L^1, |\alpha| \le 2\}$ (Sobolev Raum)

Dann zeigen wir, dass die Fundamentallösung gegeben ist durch

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

Rückblick

Bevor wir mit der Konstruktion von y_1, y_2 beginnen konnten hatten wir die Lösung der Differentialgleichung 1 mit $q = 0$ in Lemma 1 festgehalten.

Lemma 1
Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Die eindeutige Lösung von

$$-y'' = \lambda y - f(x) \quad x \in [0,1]$$

mit Anfangswerten

$$y(0) = a \quad y'(0) = b$$

ist gegeben durch

$$y(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt.$$

Mit $c_\lambda(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ und $s_\lambda(x) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}$ gilt

$$y(x) = ac_\lambda(x) + bs_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)f(t)dt.$$

Beweis. Siehe Seite 4 Pöschel, J., Turbowitz, E. Inverse Spectral Theory. Boston, (1987) [1]. □

Die Idee war nun y_1, y_2 als Potenzreihen in q zu konstruieren. Wir betrachten hierfür y_1, da für y_2 das Vorgehen analog funktioniert. Wenn y_1 eine Potenzreihe in q ist, so können wir y_1 in der Darstellung

$$y_1(x, \lambda, q) = C_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x, \lambda, q)$$

betrachten. Zweifache Differenzierung nach x und einsetzen in die Differentialgleichung 1 liefert dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n'' + \sum_{n=1}^{\infty} qC_{n-1} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich ergibt sich die Rekursion

$$-C_0'' = \lambda C_0$$

und

$$-C_n'' + qC_{n-1} = \lambda C_n \quad n \geq 1.$$

Die Anfangswerte folgen aus den Anfangswerten von y_1 und sind gegeben durch

$$\begin{aligned} C_0(0) &= 1 \qquad & C_n(0) &= 0 \\ C_0'(0) &= 0 \qquad & C_n'(0) &= 0 \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Für $n = 0$ ergibt sich als Lösung $C_0(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ und für $n \geq 1$ ergibt sich mit der Anwendung von Lemma 1 mit $f(x) = q(x)C_{n-1}$

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x - t)q(t)C_{n-1}(t, \lambda, q)dt.$$

Durch Induktion erhalten wir

$$C_n(x, \lambda, q) = \int\limits_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1} = x} \cdots \int c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \big[s_\lambda(t_{i+1} - t_i)\, q(t_i)\big]\, dt_1 \cdots dt_n.$$

Analog konstruieren wir y_2 und erhalten

$$y_2(x, \lambda, q) = s_\lambda(x) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x, \lambda, q)$$

wobei

$$S_n(x, \lambda, q) = \int\limits_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1} = x} \cdots \int s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \big[s_\lambda(t_{i+1} - t_i)\, q(t_i)\big]\, dt_1 \cdots dt_n.$$

Eine ausführliche Beschreibung der Konstruktion von y_1 und y_2 findet sich auf Seite 5f. Pöschel, J., Turbowitz, E. Inverse Spectral Theory. Boston, (1987) [1].

Theorem 1
Die Potenzreihen y_1, y_2 konvergieren gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0,1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ gegen die eindeutige Lösung von

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in [0,1]$$

und erfüllen die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0,\lambda,q) &= y_2'(0,\lambda,q) = 1 \\ y_1'(0,\lambda,q) &= y_2(0,\lambda,q) = 0. \end{aligned}$$

Ferner gelten

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda,q) &= \cos(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_1(t,\lambda,q)dt \\ y_2(x,\lambda,q) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_2(t,\lambda,q)dt \end{aligned}$$

und

$$|y_1(q,\lambda,x)|, |y_2(q,\lambda,x)| \leq exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}).$$

Beweis. Siehe Seite 8f. Pöschel, J., Turbowitz, E. Inverse Spectral Theory. Boston, (1987) [1]. □

Die Fundamentallösung II

Wir wollen zu Beginn die analytischen Eigenschaften von y_1 und y_2 hervorheben. Ziel des Abschnittes wird es sein die eindeutige Fundamentallösung der Differentialgleichung 1 zu konstruieren und einige grundlegenden Abschätzungen zu zeigen.

Lemma 2

(1) Für alle $x \in [0,1]$ sind $y_j(x,\lambda,q)$ und $y_j'(x,\lambda,q)$ für $j = 1,2$ ganze Funktionen[1] *auf $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$. Sie sind reell auf $\mathbb{R} \times L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$.*

(2) Die Lösung $y_1(\cdot,\lambda,q), y_2(\cdot,\lambda,q)$ ist eine analytische Funktion[2] *von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ nach $H^2_{\mathbb{C}}([0,1])$*[3].

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für y_1, da für y_2 die Beweisschritte analog sind.

(1) Wir betrachten y_1 in der Darstellung als Potenzreihe

$$y_1(x,\lambda,q) = C_0(x,\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x,\lambda,q)$$

[1] Funktion die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph (also auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar) ist.
[2] Funktion die lokal durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann.
[3] $H^2_{\mathbb{C}}([0,1]) = \{u \in L^2 : u', u'' \in L^2\}$

mit

$$C_n(x,\lambda,q) = \int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}=x} \cdots \int c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n}[s_\lambda(t_{i+1}-t_i)] \prod_{i=1}^{n} q(t_i)dt_1\cdots dt_n.$$

Sowohl c_λ als auch s_λ sind ganze Funktionen bezüglich λ. Damit ist der Integrand ganz in λ. q tritt polynomial im Integranden auf, also ist der Integrand auch ganz in q. Die Integration über eine kompakte Menge erhält diese Eigenschaft. Damit ist C_n eine ganze Funktion in λ und q.
Mit der gleichmäßigen Konvergenz der Summe auf kompakten Teilmengen von $[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ erhalten wir, dass y_1 eine ganze Funktion in λ und q ist für alle $x\in[0,1]$.
Nach Theorem 1 gilt

$$y_1'(x,\lambda,q) = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}x)q(t)y_1(t,\lambda,q)dt.$$

Wieder ist aufgrund der stetig Differenzierbarkeit in λ und q, y_1' eine ganze Funktion in λ und q.
Seien $\lambda\in\mathbb{R}$ und q reellwertig. Es gilt

$$\begin{aligned} y_1'' &= (q(x)-\lambda)y_1 \\ \overline{y_1''} &= \overline{(q(x)-\lambda)y_1} = (\overline{q(x)}-\overline{\lambda})\overline{y_1} = (q(x)-\lambda)\overline{y_1} \end{aligned}$$

Da sowohl $y_1, \overline{y_1}$ die Differentialgleichung erfüllen, folgt mit der Eindeutigkeit sofort $y_1=\overline{y_1}$. Damit ist y_1 reell.

(2) Wir betrachten wieder die Summanden C_n. Da diese ganze Funktionen von $\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ nach $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ sind, sind diese auch analytisch. Das folgt aus der Cauchy-Integralformel. Wieder folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz, dass y_1 und y_2 ebenfalls analytische Funktionen von $\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ nach $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ sind. Die Einbettung

$$i:\mathcal{C}_{\mathbb{C}}\to L^2_{\mathbb{C}}, f\mapsto f$$

ist wegen $\|f\|_{L^2}\le\|f\|_\infty$ stetig. Also ist y_1 auch analytisch als Abbildung von $\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ nach $L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$. Wegen

$$y_1'' = (q-\lambda)y_1$$

ist auch $y_1'' \in L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$. Damit ist y_1 als Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $H^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ analytisch.

$\square$

Definition 2
Für zwei differenzierbare Funktionen f, g definieren wir die Wronski-Determinante durch

$$[f, g] = det \begin{bmatrix} f & g \\ f' & g' \end{bmatrix} = fg' - f'g.$$

Damit können wir im folgenden das schöne Ergebnis festhalten.

Lemma 3
Für y_1 und y_2 gilt

$$[y_1, y_2] = 1. \quad \textit{(Wronski-Identität)}$$

und damit

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})^{1}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} [y_1, y_2]' &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' \\ &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1' y_2' - y_1'' y_2 \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2. \end{aligned}$$

y_1 und y_2 erfüllen die Differentialgleichung 1 und einsetzen für y_1'' und y_2'' liefert

$$[y_1, y_2]' = y_1(q - \lambda)y_2 - y_2(q - \lambda)y_1 = 0.$$

Damit ist $[y_1, y_2]$ konstant und wir erhalten

$$[y_1, y_2](x) = [y_1, y_2](0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1.$$

$\square$

Insbesondere haben wir gezeigt, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind und damit den gesamten Lösungsraum aufspannen.

[1] Gruppe der komplexen 2×2 Matrizen mit Determinante 1.

Theorem 2
Seien $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Dann hat das inhomogene Anfangswertproblem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y - f(x) \quad x \in [0,1]$$

mit Anfangsbedingung

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

eine eindeutige Lösung. Die Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x) + \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))f(t)dt.$$

Beweis. Da y_1 und y_2 die Differentialgleichung für $f(x) = 0$ erfüllen reicht es

$$\begin{aligned} y_f(x) &= \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))f(t)dt \\ &= y_2(x) \int_0^x y_1(t)f(t)dt - y_1(x) \int_0^x y_2(t)f(t)dt \end{aligned}$$

zu betrachten. Differentiation nach x liefert

$$\begin{aligned} y_f'(x) = y_2'(x) &\int_0^x y_1(t)f(t)dt + y_2(x)y_1(x)f(x) - y_1'(x) \int_0^x y_2(t)f(t)dt - y_1(x)y_2(x)f(x) \\ = y_2'(x) &\int_0^x y_1(t)f(t)dt - y_1'(x) \int_0^x y_2(t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Erneutes differenzieren nach x und die Anwendung der Wrosnki-Identität ergibt

$$\begin{aligned} y_f''(x) = y_2''(x) &\int_0^x y_1(t)f(t)dt + y_2'(x)y_1(x)f(x) - y_1''(x) \int_0^x y_2(t)f(t)dt - y_1'(x)y_2(x)f(x) \\ = y_2''(x) &\int_0^x y_1(t)f(t)dt - y_1''(x) \int_0^x y_2(t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Wieder nutzen wir aus, dass y_1, y_2 die Differentialgleichung 1 erfüllen und erhalten.

$$\begin{aligned} y_f''(x) &= y_2''(x) \int_0^x y_1(t)f(t)dt - y_1''(x) \int_0^x y_2(t)f(t)dt \\ &= y_2(x)(\lambda - q(x)) \int_0^x y_1(t)f(t)dt - y_1(x)(\lambda - q(x)) \int_0^x y_2(t)f(t)dt \\ &= \lambda y_f(x) - q(x)y_f(x) - f(x). \end{aligned}$$

Damit erfüllt y die Differentialgleichung und die Anfangswerte sind gegeben durch

$$y(0) = ay_1(0) + by_2(0) + \int_0^0 (y_1(t)y_2(0) - y_1(0)y_2(t))f(t)dt = a$$

und

$$y'(0) = ay_1'(0) + by_2'(0) + y_2'(0)\int_0^0 y_1(t)f(t)dt - y_1'(0)\int_0^0 y_2(t)f(t)dt = b.$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen betrachten wir $v = y - \tilde{y}$, wobei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung ist und die gleichen Anfangswerte hat. Dann gilt

$$\begin{aligned}
-v'' &= -(y'' - \tilde{y}'') \\
&= -(-\lambda y + q(x)y + f(x) + \lambda\tilde{y} - q(x)\tilde{y} - f(x)) \\
&= -(-\lambda v + qv) \\
&= \lambda v - qv.
\end{aligned}$$

Damit ist die Lösung gegeben durch

$$v(x) = v(0)y_1(x) + v'(0)y_2(x) = 0.$$

Also folgt sofort $y = \tilde{y}$. □

Damit haben wir gezeigt, dass y_1, y_2 zusammen mit den Anfangswerten die eindeutige Fundamentallösung der Differentialgleichung 1 bilden.

Korollar 1
Jede Lösung der Differentialgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

ist gegeben durch

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

Hat die Lösung außerdem eine zweifache Nullstelle in $[0, 1]$*, dann gilt sofort* $y(x) = 0$ *für alle* $x \in [0, 1]$.

Beweis. Die erste Behauptung ist einfach Theorem 2 mit $f = 0$. Für die zweite Behauptung betrachten wir die Lösung und die Ableitung der Lösung in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}.$$

Sei x_0 die doppelte Nullstelle. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix}}_{=:M(x_0)} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Wronski-Identität gilt $det(M(x_0)) = 1$, womit $M(x_0)$ invertierbar ist. Damit folgt

$$M(x_0) \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = M(x_0)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Also gilt $y(x) = y'(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x) = 0$. □

Abschließend wollen wir einige grundlegende Abschätzungen betrachten, die eine obere Schranke für die Abweichung der Lösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung 1 von den Lösungen der homogenen Differentialgleichung $-y'' = \lambda y$ liefern.

Theorem 3
Auf $[0,1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ *gelten*

$$|y_1(x,\lambda,q) - \cos(\sqrt{\lambda}x)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|Im(\lambda)|x + \|q\|\sqrt{x}) \tag{1}$$

$$|y_2(x,\lambda,q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|Im(\lambda)|x + \|q\|\sqrt{x}) \tag{2}$$

und

$$|y_1'(x,\lambda,q) + \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)| \leq \|q\| \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}) \tag{3}$$

$$|y_2'(x,\lambda,q) - \cos(\sqrt{\lambda}x)| \leq \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}). \tag{4}$$

Beweis. Im allgemeinen gelten für $x \in [0,1]$ die Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
|c_\lambda(x)| &= |\cos(\sqrt{\lambda}x)| = \frac{1}{2}|e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x}| \leq \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x),\\
|s_\lambda(x)| &= \frac{|\sin(\sqrt{\lambda}x)|}{|\sqrt{\lambda}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x),\\
|s_\lambda(x)| &= |\int_0^x c_\lambda(t)dt| \leq \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x).
\end{aligned}
$$

und

$$
\int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n+1}=x}\cdots\int \prod_{i=1}^{n-1}|q(t_i)|dt_1\cdots dt_n \overset{\text{Theorem 1}}{\leq} \frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!}.
$$

(1) Es gilt die $y_1(x,\lambda,q) = cos(\sqrt{\lambda}x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x,\lambda,q)$ mit

$$
C_n(x,\lambda,q) = \int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n+1}=x}\cdots\int c_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^{n}\big[s_\lambda(t_{i+1}-t_i)\,q(t_i)\big]\,dt_1\cdots dt_n.
$$

Wir schätzen zuerst mit Hilfe von Theorem 1 die Summanden C_n für $n \geq 1$ ab:

$$
\begin{aligned}
|C_n(x,\lambda,q)| &\leq \int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n+1}=x}\cdots\int |c_\lambda(t_1)|\prod_{i=1}^{n}\big[|s_\lambda(t_{i+1}-t_i)|\,|q(t_i)|\big]\,dt_1\cdots dt_n\\
&\leq \int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n+1}=x}\cdots\int |c_\lambda(t_1)|\prod_{i=1}^{n-1}|s_\lambda(t_{i+1}-t_i)||s_\lambda(x-t_n)|\prod_{i=1}^{n-1}|q(t_i)|dt_1\cdots dt_n\\
&\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n+1}=x}\cdots\int \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|(t_1+\sum_{i=1}^{n-1}(t_i+1-t_i)+x-t_n))\prod_{i=1}^{n-1}|q(t_i)|dt_1\cdots dt_n\\
&= \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\sqrt{\lambda}|x)\int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n+1}=x}\cdots\int \prod_{i=1}^{n-1}|q(t_i)|dt_1\cdots dt_n\\
&\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)\frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Und damit gilt

$$\begin{aligned}
|y_1(x,\lambda,q) - \cos(\sqrt{\lambda}x)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(x,\lambda,q)| \\
&\le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!} \\
&\le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!} \\
&= \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

(2) Analog zu (1) betrachten wir $y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x,\lambda,q)$, wobei

$$S_n(x,\lambda,q) = \int_{0\le t_1 \le \cdots \le t_{n+1}=x} \cdots \int s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \big[s_\lambda(t_{i+1}-t_i)\, q(t_i)\big]\, dt_1 \cdots dt_n.$$

Wieder schätzen wir die Summanden S_n ab

$$\begin{aligned}
|S_n(x,\lambda,q)| &\le \int_{0\le t_1 \le \cdots \le t_{n+1}=x} \cdots \int |s_\lambda(t_1)| \prod_{i=1}^{n} \big[|s_\lambda(t_{i+1}-t_i)|\, |q(t_i)|\big]\, dt_1 \cdots dt_n \\
&\le \int_{0\le t_1 \le \cdots \le t_{n+1}=x} \cdots \int |s_\lambda(t_1)| \prod_{i=1}^{n-1} |s_\lambda(t_{i+1}-t_i)||s_\lambda(x-t_n)| \prod_{i=1}^{n-1} |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n \\
&\le \frac{1}{|\lambda|} \int_{0\le t_1 \le \cdots \le t_{n+1}=x} \cdots \int \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|(t_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(t_i+1-t_i) + x - t_n)) \prod_{i=1}^{n-1} |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \int_{0\le t_1 \le \cdots \le t_{n+1}=x} \cdots \int \prod_{i=1}^{n-1} |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n \\
&\le \frac{1}{|\lambda|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Damit folgt dann genauso

$$
\begin{aligned}
|y_2(x,\lambda,q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda})}| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(x,\lambda,q)| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|Im(\lambda)|x + \|q\|\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

(3) Nach Theorem 1 hat y_1 die Darstellung

$$
y_1(x,\lambda,q) = \cos(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_1(t,\lambda,q) dt.
$$

Damit ergibt sich für die Ableitung

$$
y_1'(x,\lambda,q) = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) y_1(t,\lambda,q) dt.
$$

Mit der Abschätzung für y_1 aus Theorem 1 gilt dann

$$
\begin{aligned}
|y_1'(x,\lambda,q) + \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)| &\leq \int_0^x |\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))||q(t)||y_1(t,\lambda,q)| dt \\
&\leq \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|(x-t)) \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|t + \|q\|\sqrt{t})|q(t)| dt \\
&\leq \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \int_0^x \exp(\|q\|\sqrt{t})|q(t)| dt \\
&\leq \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}) \int_0^x |q(t)| dt \\
&= \|q\| \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

(4) Schätzen wir in (2) die S_n nur einmal die Sinusfunktion mit der $\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}$-Abschätzung

ab, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|y_1(x,\lambda,q)| &\le \frac{|\sin(\sqrt{\lambda}x)|}{|\sqrt{\lambda}|} + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!} \\
&\le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}(1+\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!}) \\
&\le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\lambda)|x+\|q\|\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

Wie in (3) liefert Theorem 1 die Darstellung

$$
y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda})} + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda})} q(t)y_2(x,\lambda,q)dt.
$$

Differentiation nach x ergibt

$$
y_2'(x,\lambda,q) = \cos(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)y_2(t,\lambda,q)dt.
$$

und wir erhalten mit Hilfe der Abschätzung von y_2 aus Theorem 1

$$
\begin{aligned}
|y_2'(x,\lambda,q)-\cos(\sqrt{\lambda}x)| &\le \int_0^x |\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))||q(t)||y_2(t,\lambda,q)|dt \\
&\le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\int_0^x \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|(x-t))\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|t+\|q\|\sqrt{t})|q(t)|dt \\
&\le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)\int_0^x \exp(\|q\|\sqrt{t})|q(t)|dt \\
&\le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x+\|q\|\sqrt{x})\int_0^x |q(t)|dt \\
&\le \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x+\|q\|\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

□

Literatur

[1] Jürgen Pöschel. *Inverse spectral theory*. eng. Pure and applied mathematics; 130. Boston [u.a., 1987. ISBN: 0125630409. URL: http://www.sciencedirect.com/science/book/9780125630405.